



Vortex, entropies et énergies de ligne en micromagnétisme

Pierre Bochard

► To cite this version:

Pierre Bochard. Vortex, entropies et énergies de ligne en micromagnétisme. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paris Sud - Paris XI, 2015. Français. NNT : 2015PA112119 . tel-01218384

HAL Id: tel-01218384

<https://theses.hal.science/tel-01218384>

Submitted on 21 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI

Spécialité : Mathématiques

par

Pierre BOCHARD

Vortex, entropies et énergies de ligne en micromagnétisme

Soutenue le 24 juin 2015 devant la Commission d'examen :

M.	Yann BRENIER	(Président du jury)
M.	Radu IGNAT	(Directeur de thèse)
M.	Benoît MERLET	
M.	Roger MOSER	
M.	Filippo SANTAMBROGIO	
Mme.	Sylvia SERFATY	

Rapporteurs :

M.	Yann Brenier
M.	Felix Otto



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91 405 Orsay CEDEX

Résumé

Cette thèse traite de questions mathématiques posées par des problèmes issus du micromagnétisme ; un thème central en est les champs de vecteur de rotationnel nul et de norme 1, qu'on voit naturellement apparaître comme configurations minimisant des énergies micromagnétiques.

Le premier chapitre est motivé par la question suivante : peut-on, en dimension plus grande que deux, caractériser les champs de vecteur de rotationnel nul et de norme 1 par une formulation cinétique ? Une telle formulation a d'abord été introduite en dimension 2 dans l'article [25] de Jabin, Otto et Perthame où elle apparaît naturellement dans le cadre de la minimisation d'une énergie de type Ginzburg-Landau. Ignat et De Lellis ont ensuite montré dans [12] qu'une telle formulation cinétique *caractérise* les champs de rotationnel nul et de norme 1 possédant une certaine régularité en dimension 2. Le premier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'une formulation cinétique similaire en dimension quelconque ; le résultat principal en est qu'en dimension strictement plus grande que 2, cette formulation cinétique ne caractérise non plus *tous* les champs de rotationnel nul et de norme 1, mais seulement les champs constants ou les vortex, c'est-à-dire les champs de vecteur de la forme $\pm \frac{x-P}{|x-P|}$.

La caractérisation cinétique des champs de vecteur de rotationnel nul et de norme 1 en dimension 2, prouvée par De Lellis et Ignat et que nous venons de mentionner reposait sur la notion d'*entropie*. Ayant obtenu une formulation cinétique en dimension quelconque, il était naturel de vouloir l'exploiter en tentant d'étendre également la notion d'entropie aux dimensions supérieures à 2. C'est ce à quoi est consacré le deuxième chapitre de cette thèse ; nous y définissons en particulier une notion d'entropie en dimension quelconque. Le point central en est la caractérisation de ces entropies par un système d'équations aux dérivées partielles, et leur description complète en dimension 3, ainsi que la preuve pour ces entropies de propriétés tout à fait semblables à celles des entropies deux dimensionnelles.

Le troisième chapitre de cette thèse, qui expose les résultats d'un travail en collaboration avec Antonin Monteil, s'intéresse à la minimisation d'énergies de type Aviles-Giga de la forme $\mathcal{I}_f(m) = \int_{J(m)} f(|m^+ - m^-|)$ où m est un champ de rotationnel nul et de norme 1 et où $J(m)$ désigne les lignes de saut de m . Deux questions classiques se posent pour ce type d'énergie : la solution de viscosité de l'équation eikonale est-elle un minimiseur et l'énergie est-elle semi-continue inférieurement pour une certaine topologie. Le résultat principal de cette partie est une construction, qui nous permet en particulier de répondre par la négative à ces deux questions dans les cas où $f(t) = t^p$ avec $p \in]0, 1[$ en donnant une condition nécessaire sur f pour que \mathcal{I}_f soit semi-continue inférieurement.

Enfin, le dernier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude d'une variante de l'énergie de Ginzburg-Landau introduite par Béthuel, Brezis et Helein où on a remplacé la condition de bord par une pénalisation dépendant d'un paramètre. Nous y décrivons le comportement asymptotique de l'énergie minimale qui, suivant la valeur de ce paramètre, soit se comporte comme l'énergie de Ginzburg-Landau classique en privilégiant une configuration vortex, soit privilégie au contraire une configuration singulière suivant une ligne.

Mots-clefs : Équations cinétiques, Entropies, Micromagnétisme, Énergie de ligne, Énergie de Ginzburg-Landau.

Abstract

This thesis is motivated by mathematical questions arising from micromagnetism. One would say that a central topic of this thesis is curl-free vector fields taking value into the sphere. Such fields naturally arise as minimizers of micromagnetic-type energies.

The first part of this thesis is motivated by the following question : can we find a kinetic formulation characterizing curl-free vector fields taking value into the sphere in dimension greater than 2 ? Such a formulation has been found in two dimension by Jabin, Otto and Perthame in [25]. De Lellis and Ignat used this formulation in [12] to characterize curl-free vector fields taking value into the sphere with a given regularity. The main result of this part is the generalization of their kinetic formulation in any dimension and the proof that if $d > 2$, this formulation characterizes only constant vector fields and vortices, i. e. vector fields of the form $\pm \frac{x-P}{|x-P|}$.

The second part of this thesis is devoted to a generalization of the notion of *entropy*, which plays a key role in the article of De Lellis and Ignat we talked about above. We give a definition of entropy in any dimension, and prove properties quite similar to those enjoyed by the classical two-dimensional entropy.

The third part of this thesis, which is the result of a joint work with Antonin Monteil, is about the study of an Aviles-Giga type energy. The main point of this part is a necessary condition for such an energy to be lower semi continuous. We give in particular an example of energy of this type for which the viscosity solution of the eikonal equation is *not* a minimizer.

The last part, finally is devoted to the study of a Ginzburg-Landau type energy where we replace the boundary condition of the classical Ginzburg-Landau energy introduced by Béthuel, Brezis and Helein by a penalization within the energy at the critical scaling depending on a parameter. The core result of this part is the description of the asymptotic of the minimal energy, which, depending on the parameter, favors vortices-like configuration like in the classical Ginzburg-Landau case, or configurations singular along a line.

Keywords : Kinetic equations, Entropies, Micromagnetism, Line-energy, Ginzburg-Landau energy.

Remerciements

Je tiens pour commencer à remercier mon directeur de thèse Radu Ignat pour m'avoir donné la possibilité de poursuivre une thèse dans un domaine si riche en questions intéressantes et pour son indéfectible soutien. Sur le plan mathématique comme sur le plan humain, je lui dois beaucoup. Je remercie chaleureusement Yann Brenier et Felix Otto de m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse, et Benoît Merlet, Roger Moser, Filippo Santambrogio et Sylvia Serfaty d'avoir accepté de prendre part à ce jury. Cette thèse ne serait probablement pas ce qu'elle est sans les nombreux doctorants croisés lors de mes pérégrinations d'un bureau à un autre : la bonne ambiance que j'ai rencontrée partout a grandement allégé la besogne parfois rude et les moments de découragement. Je remercie tout particulièrement Antonin qui est pour beaucoup dans le troisième chapitre de cette thèse. D'un point de vue matériel, rien de tout cela n'aurait été possible sans le soutien constant de la faculté d'Orsay ; à cet égard, je remercie particulièrement Patrick Gérard et Bertrand Maury.

Cette liste de remerciements serait incomplète si j'en omettais les amis qui m'ont permis souvent de penser à autre chose qu'à mes propres problèmes, mathématiques et autres. Merci donc à Alienor, Mathilde et Sandra, à Matthias, Sébastien et Yassen. Un salut spécial aux vétérans libanais Laurent et Julie qui égayaient mes retours à Saint-Étienne. Je remercie enfin ma mère et mon père, pour les bons moments.

Table des matières

Introduction	9
1 Une caractérisation cinétique des vortex	9
2 Une généralisation de la notion d'entropie	10
3 Une condition nécessaire pour la semi-continuité inférieure d'une énergie de ligne	12
4 Une énergie de type Ginzburg-Landau	13
I Une caractérisation cinétique des vortex	15
5 Notations	16
6 Formulation cinétique	16
7 Principaux résultats	19
8 Trace le long d'une droite	20
8.1 Définitions alternatives de la trace	27
9 Preuve du théorème I.8 : cas d'un ouvert convexe	27
10 Preuve du théorème I.8 : cas d'un ouvert connexe	33
II Une généralisation de la notion d'entropie	35
11 Introduction	36
12 Principaux résultats	37
13 Préambule	41
13.1 Opérateurs $D_{i,j}$	41
13.2 Fonctions $u_{i,j}$	43
14 Entropie	44

14.1 Un exemple d'entropie en dimension 2	45
14.2 Un exemple d'entropie en dimension quelconque	46
15 Propriétés des entropies régulières	54
15.1 Démonstration du théorème II.6	55
15.2 Démonstration du théorème II.7	58
16 Caractérisation des entropies régulières	59
16.1 Démonstration du théorème II.10	59
16.2 Le cas de la dimension 3	61
17 Bilan et Perspectives	70
 III A necessary condition for lower semicontinuity of line energies	 71
18 Introduction	72
18.1 Line energies	72
18.2 Related models	73
18.3 Lower semicontinuity, Viscosity solution	75
19 Construction of a competitor of the viscosity solution	77
20 Lower semicontinuity of line energies, proof of theorem III.4.	81
 IV Une énergie de type Ginzburg-Landau	 83
21 Energie deux dimensionnelle	84
22 Étude d'une énergie 1d	87
23 Borne supérieure en degré 0	90
24 Borne supérieure en degré 1	96
25 Borne inférieure	97
Références	103

Introduction

1 Une caractérisation cinétique des vortex

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $m: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable. Pour $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, on associe à la fonction m la fonction χ définie par :

$$\begin{aligned} \chi: \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (x, \xi) &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } m(x) \cdot \xi > 0, \\ 0 & \text{si } m(x) \cdot \xi \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

L'objet de la première partie de cette thèse est la caractérisation des champs m vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \forall v \in \xi^\perp \quad v \cdot \nabla \chi(., \xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1)$$

$$|m(x)| = 1 \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (2)$$

L'intérêt pour ces relations provient de l'article [25] de Jabin, Otto et Perthame dans lequel les auteurs considèrent le cas de la dimension 2. Dans cet article, ils s'intéressent à l'énergie

$$G_\varepsilon(m) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - |m|^2)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla^{-1} \nabla \cdot m|^2$$

où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 et prouvent en particulier le théorème suivant :

Théorème .1. *(Jabin, Otto et Perthame [25]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $(m_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite vérifiant $G_\varepsilon(m_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ et de limite m dans L^2 , alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^1 \quad \xi \cdot \nabla \chi(., \xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (3)$$

$$|m(x)| = 1 \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (4)$$

La combinaison des deux relations précédentes est une façon de dire qu'un champ de vecteur est de norme 1 et de divergence nulle au sens des distributions sur Ω .

Jabin, Otto et Perthame montrent dans ce même article que ces deux relations ont de fortes propriétés régularisantes pour m . En particulier on a le théorème suivant :

Théorème .2. *(Jabin, Otto, Perthame, [25]). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et m vérifiant (3) et (4), alors m est localement Lipschitz en dehors d'un nombre de points localement fini.*

Ignat et De Lellis-Ignat montrent alors dans [19] et [12] que si le champ m est suffisamment régulier, il y a en fait équivalence entre les relations (3) et (4) et le fait pour m d'être de divergence nulle et de norme 1, et en déduisent le théorème suivant :

Théorème .3. *(De Lellis, Ignat, [12]). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, p dans $[1, 3]$ et m dans $W_{div}^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{S}^1) = \left\{ m \in W_{loc}^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{R}^2) : \nabla \cdot m = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } |m| = 1 \text{ p.p.} \right\}$, alors m est localement Lipschitz en dehors d'un nombre de point localement fini.*

En dimension plus grande, on a de bonnes raisons de penser que de tels résultats de régularité sont encore vrais, mais si au lieu de considérer l'opérateur de *divergence*, on considère l'opérateur *rotationnel*, c'est à dire si on s'intéresse aux champs de rotationnel nul et de norme 1. Ce problème est lié au problème classique de la régularité des solutions de l'équation eikonale, c'est-à-dire aux fonctions vérifiant :

$$|\nabla\varphi| = 1.$$

Remarquons que si on reformule les relations (3) et (4) en terme de rotationnel plutôt que de divergence, on obtient les relation suivantes :

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^1 \quad \xi^\perp \cdot \nabla \chi(., \xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (5)$$

$$|m(x)| = 1 \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (6)$$

Un premier pas dans l'obtention d'un théorème analogue au théorème de De Lellis et Ignat que nous venons de citer mais pour le rotationnel et en dimension supérieure à deux était donc de commencer par étudier les propriétés de régularisation de l'analogie des relations (5) et (6) en dimension supérieure. C'est ce qui a motivé notre étude des relations (1) et (2). En dimension plus grande, ces relations ont encore un effet régularisant : la première partie de cette thèse est consacrée à établir le théorème suivant.

Théorème .4. *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^d où $d \geq 3$ et m une fonction mesurable vérifiant (1) et (2). Alors, soit le champ m est constant, soit il existe un point P de \mathbb{R}^d et $\alpha \in \{-1, 1\}$ tel que :*

$$m(x) = \alpha \frac{x - P}{|x - P|} \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } \Omega.$$

2 Une généralisation de la notion d'entropie

La notion d'*entropie* au sens où nous l'utiliserons ici apparaît dans les articles [5] d'Aviles et Giga et [29] de Jin et Kohn. La motivation, que nous reprenons de l'article [29] de Jin et Kohn en est la suivante : Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^2 , les auteurs s'intéressent à la minimisation de l'énergie

$$AG_\varepsilon(m) := \int_\Omega \varepsilon |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - |m|^2)^2 \quad (7)$$

où m est de rotationnel nul avec certaines conditions de bord. Ils sont plus particulièrement intéressés par le comportement asymptotique de cette énergie lorsque ε tend vers 0 et remarquent qu'en introduisant la fonction :

$$\Phi(x_1, x_2) := 2\left(-\frac{1}{3}x_1^3 - x_1(x_2^2 - 1), \frac{1}{3}x_2^3 + x_2(x_1^2 - 1)\right),$$

pour m de rotationnel nul, on a la relation :

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] = 2(1 - |m|^2)(\partial_1 m_1 - \partial_2 m_2),$$

d'où

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] \leq \frac{1}{\varepsilon} (1 - |m|^2)^2 + \varepsilon |\nabla m|^2 - 2\varepsilon (\partial_1 m_1 \partial_2 m_2 - (\partial_1 m_2)^2). \quad (8)$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [\Phi \circ m] \leq AG_{\varepsilon}(m) - 2\varepsilon \int_{\Omega} (\partial_1 m_1 \partial_2 m_2 - (\partial_1 m_2)^2), \quad (9)$$

et comme

$$\int_{\Omega} (\partial_1 m_1 \partial_2 m_2 - (\partial_1 m_2)^2) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \begin{pmatrix} -m_2 \partial_1 m_2 \\ m_2 \partial_1 m_1 \end{pmatrix} = \int_{\partial\Omega} m_2 (\partial_1 m)^\perp \cdot n,$$

si on s'intéresse à la minimisation de AG_{ε} avec comme condition de bord $m = n$ où n désigne la normale au bord de Ω , ce dernier terme est contrôlé et la relation (9) nous donne une borne inférieure pour l'énergie. L'obtention de cette borne inférieure repose sur l'inégalité (8) donnée par la fonction Φ . Ce genre d'inégalité peut s'obtenir non seulement pour la fonction Φ précédente mais pour une classe de fonction bien plus large : les *entropies*. Nous reprenons ici la définition donnée par Ignat et Merlet dans [22].

Définition .5. *On appelle entropie une fonction régulière $\Phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et telle que pour tout x dans \mathbb{S}^1*

$$\langle \partial_{\theta} \Phi(x), x \rangle = 0,$$

où $x = e^{i\theta}$.

Voilà qui résume très brièvement l'origine de la notion d'entropie. Notre propre intérêt pour cette notion, néanmoins, était motivé par une autre application de celle-ci très liée à la première partie de cette thèse : le théorème de De Lellis et Ignat que nous avons mentionné précédemment. Sans entrer dans les détails de la preuve de ce théorème ici, disons que celle-ci repose sur le fait que pour p dans $[1, 3]$, les champs dans $W^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$ vérifient les deux équations (4) et (5) et cela se fait précisément grâce à la notion d'entropie que nous venons d'évoquer, en montrant que les fonctions $\Phi_{\xi}(m) := \xi \mathbf{1}_{\{m \cdot \xi > 0\}}$ sont des entropies généralisées.

Nous avons dans la première partie obtenu une formulation cinétique ayant des propriétés régularisantes en dimension quelconque ; il était naturel d'essayer de généraliser la notion d'entropie en dimension $d > 2$ en vue d'obtenir des analogues au théorème .3.

Dans la deuxième partie, nous donnons une définition en toute dimension de la notion d'entropie grâce aux champs de vecteur suivants :

Définition .6. *Pour i, j dans $\{1, \dots, d\}$, posons :*

$$\begin{aligned} u_{i,j} &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto x_i e_j - x_j e_i \end{aligned}$$

La définition complète est légèrement plus générale que cela (C'est la définition 32 de cette thèse) mais pour une fonction régulière, on a la définition suivante :

Définition .7. *On dit qu'une fonction $\Phi: \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une entropie si et seulement si pour tout i, j dans $\{1, \dots, d\}$,*

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1} \quad \langle D_x \Phi u_{i,j}(x), u_{i,j}(x) \rangle = 0.$$

Remarquons qu'il est facile de voir qu'on retombe bien sur la définition donnée précédemment si $d = 2$ puisqu'alors il n'y a qu'une seule relation à vérifier et $D_x \Phi u_{1,2}(x) = \partial_\theta \Phi(x)$.

Nous prouvons ensuite pour ces entropies des propriétés tout à fait analogues à celles des entropies définies en dimension 2. \mathbf{ENT}_{reg} désignant l'ensemble des entropies régulières, on a en particulier le théorème suivant :

Théorème .8. *Soit $\Phi \in \mathbf{ENT}_{reg}$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $m \in C_{rot}^\infty(\Omega, \mathbb{S}^{d-1})$. Alors, pour tout x dans Ω*

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m](x) = 0.$$

Nous prouvons un théorème caractérisant nos entropies en terme d'un système d'équations aux dérivées partielles, et nous concluons cette partie par l'étude du cas de la dimension 3, pour lequel nous donnons une description complète de nos entropies.

3 Une condition nécessaire pour la semi-continuité inférieure d'une énergie de ligne

Ceci nous mène naturellement à la troisième partie de cette thèse, qui est le fruit d'un travail en collaboration avec Antonin Monteil. Soit $f: [0, 2] \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction-coût et Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Pour m dans $\{m \in BV(\Omega, \mathbb{R}^2) : |m| = 1 \text{ p.p. et } \nabla \cdot m = 0 \text{ sur } \Omega\}$, nous nous sommes intéressés à l'énergie

$$\mathcal{I}_f(m) = \int_{J(m)} f(|m_+ - m_-|) d\mathcal{H}^1(x).$$

où $m_\pm(x)$ désigne la trace de m sur les bords de la ligne de saut $J(m)$ pour \mathcal{H}^1 -presque tout x dans $J(m)$. Le premier exemple d'une énergie de ce type est dû à P. Aviles. et Y. Giga. Dans [5], ils conjecturent que pour $f(t) = \frac{1}{3}t^3$, \mathcal{I}_f est la Γ -limite de l'énergie de type Ginzburg-Landau suivante :

$$\begin{cases} AG_\varepsilon(m) = \int_\Omega \varepsilon |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - |m|^2)^2 & \text{pour } m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ et } \nabla \cdot m = 0, \\ AG_\varepsilon(m) = +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Même pour ce modèle particulier, seuls des résultats partiels sont déjà connus. En ce qui concerne la Γ -convergence des fonctionnelles AG_ε vers \mathcal{I}_f avec $f(t) = \frac{1}{3}t^3$, Aviles et Giga prouvent dans [5] la Γ -liminf pour la convergence L^1 en utilisant la notion d'entropie (voir également [29]). La compacité L^2 forte des suites d'énergie finie a été prouvée par Ambrosio, De Lellis et Mantegazza dans [3] et par De Simone, Kohn, Müller et Otto dans [14] par un argument de compacité par compensation toujours grâce à la notion d'entropie. Dans [13] enfin, les auteurs prouvent que les configurations limites m de l'énergie AG_ε ont une structure de type BV et qu'on peut en particulier parler de leur trace le long de l'ensemble $J(m)$ dans \mathcal{I}_f .

Le cas où l'on s'intéresse maintenant à l'énergie \mathcal{I}_f avec $f(t) = t^p$ pour $p > 0$ a lui aussi donné lieu à de nombreux travaux et de nombreuses questions sont également encore ouvertes. Dans [3], on a par exemple la conjecture suivante :

Conjecture .9. Soit $\overline{\mathcal{I}}_f$ la relaxée dans L^1 de \mathcal{I}_f ,

$$\overline{\mathcal{I}}_f(m) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_f(m_n) : m_n \in BV \text{ et } m_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m \text{ dans } L^1 \right\}, \quad \forall m \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Si $f(t) = t^p$ où $1 \leq p \leq 3$, alors $\overline{\mathcal{I}}_f$ est semi-continue inférieurement pour la topologie L^1 forte.

Pour $p > 3$, cette conjecture est fausse (voir [3]). Le cas $p = 3$ est étudié par P. Aviles et Y. Giga dans [5]. Plus récemment, le cas $p = 2$ a été prouvé par R. Ignat et B. Merlet dans [22], article dans lequel ils prouvent également que pour $1 \leq p \leq 3$, il existe une fonction-coût $f(t) = t^p$ pour $t \in [0, \sqrt{2}]$ donnant une fonctionnelle $\overline{\mathcal{I}}_f$ s. c. i.. Ici, nous nous sommes intéressés au cas ouvert $p < 1$. Le point principal de cette partie est la démonstration du critère suivant, donnant une condition nécessaire sur f pour avoir la semi-continuité inférieure de \mathcal{I}_f , qui exclut de fait les fonctions $f(t) = t^p$ pour $0 < p < 1$.

Théorème .10. Soit $f: [0, 2] \rightarrow [0, +\infty]$ et Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Si \mathcal{I}_f est s. c. i. dans $X = BV(\Omega, \mathbb{S}^1)$ muni de la topologie faible, alors f est s. c. i. et de plus :

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \leq 2 \limsup_{t \rightarrow 2} f(t). \quad (10)$$

En particulier, pour $f(t) = t^p$, $p \in]0, 1[$, \mathcal{I}_f n'est pas semi-continue inférieurement. La solution de viscosité n'est alors pas minimale, même pour un domaine convexe.

4 Une énergie de type Ginzburg-Landau

La dernière partie de cette thèse est consacrée à l'étude d'une énergie de type Ginzburg-Landau. L'ouvrage classique sur ce type d'énergie est [6] de Béthuel, Brézis et Helein où les auteurs s'intéressent sur un ouvert Ω du plan à l'énergie :

$$GL_\varepsilon(m) = \int_{\Omega} |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} (1 - |m|^2)^2$$

avec la condition de bord $m = h$ sur $\partial\Omega$ où $|h| = 1$. D'un point de vue mathématique, ce modèle a été très fructueux : il est par exemple connu (voir par exemple [6] ou [28]) que le comportement asymptotique de l'énergie minimale est déterminé par le degré de la condition de bord h et que plus précisément

$$\inf GL_\varepsilon \approx 2\pi |\deg h| |\ln \varepsilon| + o(|\ln \varepsilon|),$$

ce qui nécessite de pouvoir parler du degré de h qui n'est que dans $H^{\frac{1}{2}}$ en tant que trace d'une fonction H^1 . Cette simple question a été à l'origine du développement d'une théorie du degré des fonctions dans des espaces de Sobolev à valeur dans la sphère (on renvoie à [7] et [30] pour plus de détails).

Nous nous sommes quant à nous intéressés dans cette dernière partie à l'énergie

$$E_\varepsilon(m) := \int_{B_R} \left[|\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - |m|^2)^2 \right] + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 \int_{B_R} |m - h|^2,$$

où $h = \frac{x^\perp}{|x|}$ et où B_R est la boule centrée en O et de rayon R . C'est une variation de l'énergie GL_ε sur un disque mais où on aurait remplacé la condition de bord par une pénalisation dépendant d'un paramètre λ . Dans le cas de l'énergie de Ginzburg-Landau classique GL_ε , on sait que l'énergie minimale serait réalisée par un vortex de degré 1. Dans notre cas, nous montrons dans la dernière partie de cette thèse que le comportement asymptotique de l'énergie minimale dépend de λ : si λ est grand, on est comme dans le cas de l'énergie de Ginzburg-Landau classique : une configuration d'énergie minimale m_ε^1 est donnée par :

$$m_\varepsilon^1(r, \theta) = \begin{cases} ie^{i\theta} & \text{si } \varepsilon \leq r < R, \\ \frac{r}{\varepsilon} ie^{i\theta} & \text{si } r < \varepsilon. \end{cases}$$

et c'est un vortex de degré 1 sur chacun des cercles $\mathcal{C}_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ qui minimise l'énergie. Si λ est petit par contre, la situation change : une configuration d'énergie minimale va rester de degré nul sur chacun des \mathcal{C}_r . Pour obtenir une borne supérieure pour l'énergie minimale dans ce cas, on construit une suite $(m_\varepsilon^0)_{\varepsilon>0}$ qui vaut h en dehors d'une bande d'ordre $|\ln \varepsilon|$ sur laquelle la phase varie rapidement pour rester de degré 0 sur chacun des \mathcal{C}_r . Lorsque ε tend vers 0, l'énergie se concentre sur cette ligne de singularité.

Le théorème suivant décrit précisément le comportement asymptotique de l'énergie dans chacun de ces deux cas.

Théorème .11.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \inf E_\varepsilon = 16\lambda R \quad \text{si } 0 < \lambda < \frac{\pi}{8R},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \inf E_\varepsilon = 2\pi \quad \text{si } \lambda \geq \frac{\pi}{8R}.$$

Première partie

Une caractérisation cinétique des vortex

Sommaire

5	Notations	16
6	Formulation cinétique	16
7	Principaux résultats	19
8	Trace le long d'une droite	20
8.1	Définitions alternatives de la trace	27
9	Preuve du théorème I.8 : cas d'un ouvert convexe	27
10	Preuve du théorème I.8 : cas d'un ouvert connexe	33

5 Notations

Dans ce qui suit, d sera un entier supérieur ou égal à 2. \mathbb{R}^d désignera comme d'habitude un d -espace vectoriel sur le corps des réels, qu'on munira d'un produit scalaire euclidien. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ on notera indifféremment $x \cdot y$ ou $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire de x et y et $|\cdot|$ désignera la norme associée. On notera O l'origine de \mathbb{R}^d et e_1, e_2, \dots, e_d sa base orthonormée canonique. \mathbb{S}^{d-1} désignera la sphère unité, c'est-à-dire que $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Si ξ est un élément de $\mathbb{R}^d \setminus \{O\}$, on notera ξ^\perp son orthogonal, c'est-à-dire $\xi^\perp := \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \xi = 0\}$. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d on notera $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω . $\mathcal{D}'(\Omega)$ désignera l'ensemble des distributions sur Ω . Enfin, si $0 \leq k \leq d$, \mathcal{H}^k désignera la mesure de Hausdorff k -dimensionnelle. Si $k = d$ est la dimension de l'espace et que A est un ensemble mesurable, on notera indifféremment $|A| = \mathcal{H}^d(A)$ la mesure de Lebesgue de A .

6 Formulation cinétique

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $m: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction mesurable. Pour $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$, définissons

$$\begin{aligned} \chi: \mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (x, \xi) &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \cdot \xi > 0, \\ 0 & \text{si } x \cdot \xi \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On associe alors à la fonction m la fonction χ

$$\begin{aligned} \chi: \Omega \times \mathbb{S}^{d-1} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (x, \xi) &\longmapsto \chi(m(x), \xi) \end{aligned}$$

L'objet de cette partie est la caractérisation des champs m vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad \forall v \in \xi^\perp \quad v \cdot \nabla \chi(\cdot, \xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (11)$$

$$|m(x)| = 1 \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (12)$$

L'intérêt pour cette relation provient de l'article [25] de Jabin, Otto et Perthame où l'on considère des champs de vecteur vérifiant une relation légèrement différente dans le cas où $d = 2$, à savoir :

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^1 \quad \xi \cdot \nabla \chi(\cdot, \xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad (13)$$

$$|m(x)| = 1 \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (14)$$

La combinaison des relations (13) et (14) est une façon de dire qu'un champ est de norme 1 et de divergence nulle au sens des distributions sur Ω . On a en effet le lemme suivant :

Lemme I.1. *Si m vérifie (13) et (14), m est de divergence nulle au sens des distributions sur Ω .*

Démonstration. Cela repose sur la remarque suivante, pour la preuve de laquelle on renvoie le lecteur au lemme I.9. Si v est un vecteur de \mathbb{S}^1 ,

$$v = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \xi \chi(v, \xi) d\sigma(\xi),$$

où σ désigne la mesure uniforme sur \mathbb{S}^1 . Appliquant cela à m , pour φ dans $C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot m dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \xi \chi(x, \xi) dx d\sigma(\xi) = 0,$$

ce qui prouve le lemme. \square

Jabin, Otto et Perthame montrent alors dans [25] que les relations (13) et (14) ont de fortes propriétés régularisantes pour m . Plus précisément, on a les théorèmes suivants :

Théorème I.2. (*Jabin, Otto, Perthame, [25]*). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et m vérifiant (13) et (14), alors m est localement Lipschitz en dehors d'un nombre de points localement fini.

Théorème I.3. (*Jabin, Otto, Perthame, [25]*). Soit $\Omega = \mathbb{R}^2$ et m vérifiant (13) et (14). Alors, soit le champ m est constant, c'est-à-dire qu'il existe m_0 dans \mathbb{S}^1 tel que :

$$m(x) = m_0 \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^2,$$

soit il existe $\alpha \in \{-1, 1\}$ et P dans \mathbb{R}^2 tels que

$$m(x) = \alpha \frac{(x - P)^\perp}{|x - P|} \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^2$$

où $^\perp$ désigne la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ignat montre alors dans [19] et [12] que si le champ m est suffisamment régulier, il y a en fait équivalence entre les relations (13) et (14) et le fait pour m d'être de divergence nulle et de norme 1. Plus précisément, pour $p > 0$, notons :

$$W_{div}^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{S}^1) := \left\{ m \in W^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{R}^2) : \nabla \cdot m = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } |m| = 1 \text{ p.p.} \right\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème I.4. (*De Lellis, Ignat, [12]*). Soit p dans $[1, 3]$ et m dans $W_{div}^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$. Alors, m vérifie la relation (13).

En combinant le théorèmes I.2 et I.4, on obtient donc un résultat de régularité des champs de divergence nulle à valeur dans \mathbb{S}^1 dans certains espaces de Sobolev :

Théorème I.5. (*De Lellis, Ignat, [12]*). Soit p dans $[1, 3]$ et m dans $W_{div}^{\frac{1}{p}, p}(\Omega, \mathbb{S}^1)$, alors m est localement Lipschitz en dehors d'un nombre de point localement fini.

En dimension plus grande, on a de bonnes raisons de penser que de tels résultats de régularité sont encore vrais, mais si au lieu de considérer l'opérateur de *divergence*, on considère l'opérateur *rotationnel*, c'est à dire si on s'intéresse aux champs de rotationnel nul et de norme 1. Ce problème est lié au problème classique de la régularité des solutions de l'équation eikonale, c'est-à-dire aux fonctions vérifiant :

$$|\nabla\varphi| = 1.$$

Avec des méthodes tout à fait différentes, des résultats de régularité de ce type ont déjà été prouvés en dimension quelconque par Caffarelli et Crandall dans [8] et [9]. On leur doit par exemple le théorème suivant :

Théorème I.6. (*Caffarelli, Crandall, [8]*). Soit $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en dehors d'un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^d$ avec $\mathcal{H}^1(\mathcal{S}) = 0$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}, \quad |\nabla u| = 1.$$

Alors, il existe a, p_0 dans \mathbb{R}^d tels pour tout x dans \mathbb{R}^d ,

$$u(x) = a \pm |x - p_0|.$$

En dimension 2, les points de vue divergence/rotationnel sont équivalents puisque si m est de divergence nulle m^\perp est de rotationnel nul et réciproquement et les théorèmes de régularités I.2, I.4, I.5 se traduisent automatiquement par des théorèmes de régularité pour les fonctions de rotationnel nul à valeur dans la sphère. Ce n'est plus le cas en dimension supérieure.

L'étude des relations (11) et (12) en dimension quelconque était donc motivée par la volonté d'établir un analogue du théorème I.2, du théorème I.4 et du théorème I.5 pour le rotationnel en toute dimension.

Pour commencer se posait une question naturelle : peut-on trouver une formulation cinétique analogue à (13) et (14) et qui implique pour m d'être de rotationnel nul ? La réponse est oui, et ce sont précisément les relations (11) et (12). On a plus précisément le lemme suivant :

Lemme I.7. Soit m un champ mesurable sur Ω vérifiant les relations (11) et (12). Alors $\text{rot } m = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Démonstration. Cela repose sur la remarque suivante, pour la preuve de laquelle on renvoie encore le lecteur au lemme I.9. Si v est un vecteur de \mathbb{S}^{d-1} ,

$$v = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(v, \xi) d\sigma(\xi).$$

où c_d est une constante dépendant seulement de d et σ désigne la mesure uniforme sur \mathbb{S}^{d-1} .

Soit $i, j \in \{1, \dots, d\}$, $i \neq j$. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_i \varphi m_j - \partial_j \varphi m_i dx &= \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot (m_j e_i - m_i e_j) dx \\ &= c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot (\xi_j e_i - \xi_i e_j) \chi(x, \xi) dx d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Comme $\xi_j e_i - \xi_i e_j \in \xi^\perp$, par la relation (11)

$$\int_{\Omega} \partial_i \varphi m_j - \partial_j \varphi m_i \, dx = 0,$$

ce qui prouve le lemme. \square

L'objet de cette partie est de montrer qu'en dimension $d > 2$ les relations (11) et (12) sont néanmoins beaucoup plus contraignantes au sens où elles *caractérisent* les champs constants ou de la forme $m(x) = \pm \frac{x-P}{|x-P|}$ où P est un point de \mathbb{R}^d . En particulier, il n'y a donc aucune chance pour qu'elles soient vérifiées par toutes les fonctions de rotationnel nul et de norme 1.

7 Principaux résultats

Le théorème suivant est le centre de cette partie

Théorème I.8. *Soit Ω un ouvert connexe et m une fonction mesurable vérifiant (11) et (12). Alors, soit le champ m est constant, c'est-à-dire qu'il existe $m_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que :*

$$m(x) = m_0 \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } \Omega,$$

soit il existe un point P de \mathbb{R}^d et $\alpha \in \{-1, 1\}$ tel que :

$$m(x) = \alpha \frac{x - P}{|x - P|} \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } \Omega.$$

Autrement dit en dimension strictement plus grande que 2, les relations (11) et (12) caractérisent *seulement* les champs constants et les configurations de la forme $\alpha \frac{x - P}{|x - P|}$, que l'on appellera par la suite vortex.

La démonstration de ce théorème va se faire en deux parties ; la première partie suit les idées de Jabin, Otto et Perthame développées dans [25] pour montrer que l'on peut définir la trace le long d'une droite d'une fonction mesurable vérifiant les relations (11) et (12). Dans une seconde partie, on va montrer que les relations (11) et (12) ont de fortes conséquences géométriques pour finir par en conclure qu'elles caractérisent les champs constants ou les vortex. Dans toute la suite de cet article m sera toujours une fonction mesurable vérifiant (11) et (12).

Nous allons tout d'abord prouver le théorème dans le cas où Ω est un ouvert convexe. Le cas d'un ouvert connexe, qui en découle, sera traité dans la dernière partie.

8 Trace le long d'une droite

On va commencer par démontrer le lemme géométrique que nous avons utilisé dans le préambule et qui montre qu'on peut exprimer un vecteur u de norme 1 en fonction des $\chi(u, \xi)$.

Lemme I.9. *Il existe une constante c_d dépendant seulement de la dimension d telle que pour tout u dans \mathbb{S}^{d-1} ,*

$$u = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(u, \xi) d\sigma(\xi) \quad (15)$$

où σ désigne la mesure uniforme sur \mathbb{S}^{d-1} . De plus,

$$c_d = \frac{d-1}{\mathcal{H}^{d-2}(\mathbb{S}^{d-2})} = \pi^{-\frac{d-1}{2}} \frac{d-1}{2} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right).$$

Démonstration. Il suffit de prouver l'égalité (15) pour un vecteur particulier, par exemple e_1 . En effet, supposons l'égalité (15) prouvée pour e_1 . Si u est dans \mathbb{S}^{d-1} , il existe R dans $O_d(\mathbb{R})$ tel que $Re_1 = u$ et

$$\begin{aligned} u = Re_1 &= c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} R\xi \chi(e_1, \xi) d\sigma(\xi) = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(u, R^{-1}\xi) d\sigma(\xi) \\ &= c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(Re_1, \xi) d\sigma(\xi) \end{aligned}$$

et

$$u = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(u, \xi) d\sigma(\xi).$$

Il suffit donc de prouver l'égalité (15) pour e_1 . Or pour e_1 ,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(e_1, \xi) d\sigma(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}} \xi d\sigma(\xi).$$

Pour $i \neq 1$, le changement de variable $(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_d) \mapsto (\xi_1, \dots, -\xi_i, \dots, \xi_d)$ laisse le domaine d'intégration $\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}$ et la mesure sur la sphère invariants et :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}} \xi_i d\sigma(\xi) = - \int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}} \xi_i d\sigma(\xi),$$

donc pour $i \neq 1$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}} \xi_i d\sigma(\xi) = 0.$$

Enfin, en notant $\xi' := (\xi_2, \dots, \xi_d)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}} \xi_1 d\sigma(\xi) &= \int_0^1 \xi_1 \mathcal{H}^{d-2}(\{\xi' \in \mathbb{R}^{d-1} : \xi_2^2 + \dots + \xi_d^2 = 1 - \xi_1^2\}) \frac{d\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \\ &= \mathcal{H}^{d-2}(\mathbb{S}^{d-2}) \int_0^1 \xi_1 (1 - \xi_1^2)^{\frac{d}{2} - \frac{3}{2}} d\xi_1. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^1 \xi_1 (1 - \xi_1^2)^{\frac{d}{2} - \frac{3}{2}} d\xi_1 = -\frac{1}{d-1} [(1 - x^2)^{\frac{d}{2} - \frac{1}{2}}]_0^1 = \frac{1}{d-1},$$

on obtient finalement :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{\xi_1 > 0\}} \xi_1 d\sigma(\xi) = \frac{1}{d-1} \mathcal{H}^{d-2}(\mathbb{S}^{d-2})$$

et

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(e_1, \xi) d\sigma(\xi) = \frac{e_1}{d-1} \mathcal{H}^{d-2}(\mathbb{S}^{d-2}).$$

Comme d'autre part

$$\mathcal{H}^{d-2}(\mathbb{S}^{d-2}) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})},$$

ceci prouve le lemme. \square

Soit $m \in L_{loc}^1(\Omega)$. Rappelons qu'on dit que x est un *point de Lebesgue* de m s'il existe une constante C dépendant de x telle que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |m(y) - C| dy = 0. \quad (16)$$

Si x est un point de Lebesgue de m , on écrira alors $m(x) := C$. On sait (voir par exemple [16]) qu'il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de \mathcal{H}^d -mesure nulle tel que tout point x de $\Omega \setminus E$ est un point de Lebesgue de m .

Les deux lemmes suivants vont nous permettre relier les points de Lebesgue de m à ceux de $\chi(\cdot, \xi)$.

Lemme I.10. *Si x est un point de Lebesgue de $\chi(\cdot, \xi)$ pour σ presque tout ξ sur \mathbb{S}^{d-1} , c'est un point de Lebesgue de m et de plus, $m(x) = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(x, \xi) d\sigma(\xi)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme (I.9) à m . Supposons que x soit un point de Lebesgue pour $\chi(\cdot, \xi)$ pour σ presque tout ξ , alors,

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} |m(y) - c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(x, \xi) d\sigma(\xi)| dy &\leq c_d \int_{B_r(x)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\xi(\chi(y, \xi) - \chi(x, \xi))| d\sigma(\xi) dy \\ &\leq c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{B_r(x)} |\chi(y, \xi) - \chi(x, \xi)| dy d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

et lorsque r tend vers 0, le membre de droite tend vers 0 par convergence dominée, ce qui prouve que x est un point de Lebesgue de m et que $m(x) = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(x, \xi) d\sigma(\xi)$. \square

Le lemme suivant en est une réciproque partielle.

Lemme I.11. *Si x est un point de Lebesgue de m et $m(x) \cdot \xi \neq 0$, x est un point de Lebesgue de $\chi(\cdot, \xi)$. De plus, $\chi(x, \xi) = \mathbf{1}_{\{m \cdot \xi > 0\}}(x)$.*

Démonstration. On va le prouver dans le cas où $m(x) \cdot \xi > 0$, le cas où le produit scalaire est strictement négatif étant similaire. Pour cela, il suffit de remarquer que $\{m \cdot \xi \leq 0\}$ est de densité nulle en x . En effet,

$$\begin{aligned} m(x) \cdot \xi \frac{|B_r(x) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}|}{|B_r|} &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}} m(x) \cdot \xi - m(y) \cdot \xi \, dy \\ &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |m(x) - m(y)| \, dy. \end{aligned}$$

Passant à la limite quand r tend vers 0,

$$\frac{|B_r(x) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}|}{|B_r|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Comme

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |\chi(y, \xi) - 1| \, dy &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}} |\chi(x, \xi) - 1| \, dy \\ &= \frac{|B_r(x) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}|}{|B_r|}, \end{aligned}$$

on a prouvé que x est également un point de Lebesgue pour $\chi(\cdot, \xi)$ et que $\chi(x, \xi) = 1 = \mathbb{1}_{\{m \cdot \xi > 0\}}(x)$. □

Remarquons avant de poursuivre que le lemme I.11 est optimal au sens ou sans l'hypothèse $m(x) \cdot \xi \neq 0$, on peut trouver un champ m vérifiant les relations (11) et (12) tel que x soit un point de Lebesgue pour m mais ne soit *pas* un point de Lebesgue pour $\chi(\cdot, \xi)$. En effet, considérons dans \mathbb{R}^d le champ $m = \frac{x}{|x|}$.

Pour $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot \varphi \chi(x, \xi) \, dx = \int_{\{x \cdot \xi > 0\}} \nabla \cdot \varphi \, dx = \int_{\{\xi^\perp\}} \varphi \cdot \xi \, d\mathcal{H}^{d-1}(x).$$

Par conséquent, $\nabla \chi(x, \xi) = \xi \mathcal{H}^{d-1} \llcorner_{\{\xi^\perp\}}$ et m vérifie donc les relations (11) et (12). Il est clair que tout point différent de O est un point de Lebesgue pour m mais pour ξ dans \mathbb{S}^{d-1} , les points de ξ^\perp ne sont *pas* des points de Lebesgue pour $x \mapsto \chi(x, \xi)$. Par exemple, prenant $\xi = e_1$ et $x \in \xi^\perp$,

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} \chi(y, \xi) \, dy = \frac{1}{|B_r|} |B_r(x) \cap \{x_1 > 0\}| = \frac{1}{2}$$

mais

$$\frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} |\chi(y, \xi) - \frac{1}{2}| \, dy = \frac{1}{2} > 0.$$

On peut maintenant prouver la proposition suivante, qui sera centrale dans notre preuve du théorème I.8.

Proposition I.12. Soit $y, z \in \Omega \setminus E$ et $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Si le segment reliant y à z est inclus dans Ω et si $z - y \in \xi^\perp$, alors

$$m(y) \cdot \xi > 0 \implies m(z) \cdot \xi \geq 0. \quad (17)$$

$$m(y) \cdot \xi < 0 \implies m(z) \cdot \xi \leq 0. \quad (18)$$

Par conséquent, si $|m| = 1$ presque partout dans Ω , alors pour presque tout $x \in \Omega$, \mathcal{H}^{d-1} -p.p. $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ et \mathcal{H}^{d-1} -p.p. $v \in \xi^\perp$ tel que $[x, x+v] \subset \Omega$:

$$\chi(x, \xi) = \chi(x+v, \xi). \quad (19)$$

Démonstration. Nous allons montrer l'implication (17), l'implication (18) se montrant de manière tout à fait analogue. Soit $y \in \Omega \setminus E$ tel que $m(y) \cdot \xi > 0$. D'après le lemme I.11, y est également un point de Lebesgue pour $\chi(\cdot, \xi)$ et $\chi(y, \xi) = 1$. Fixons maintenant $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ et posons :

$$\chi_\varepsilon := \rho_\varepsilon * \chi(\cdot, \xi)$$

où $\rho_\varepsilon := \frac{1}{|B_\varepsilon|} \mathbb{1}_{B_\varepsilon}$. Alors la fonction $x \mapsto \chi_\varepsilon(x)$ est uniformément continue sur tout compact et en tout point de Lebesgue x de $\chi(\cdot, \xi)$

$$\chi_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(x, \xi). \quad (20)$$

La régularité de $x \mapsto \chi_\varepsilon(x)$ est standard (voir par exemple [1]). Montrons donc la convergence en tout point de Lebesgue. Soit x un point de Lebesgue de χ . Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Alors,

$$|\chi_\varepsilon(x) - \chi(x, \xi)| \leq \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x)} |\chi(s, \xi) - \chi(x, \xi)| ds.$$

Passant à la limite lorsque ε tend vers 0, on a prouvé l'égalité (20).

D'autre part, si

$$\chi_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} l \in \{0, 1\}, \quad (21)$$

x est un point de Lebesgue de $\chi(\cdot, \xi)$ et $\chi(x, \xi) = l$. En effet

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x)} |\chi(s, \xi) - l| ds &= \frac{1}{|B_\varepsilon|} |B_\varepsilon(x) \cap \{\chi(s, \xi) \neq l\}| \\ &= \frac{1}{|B_\varepsilon|} \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \chi(s, \xi) - l ds \right| \\ &= |\chi_\varepsilon(x) - l|. \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'assertion précédente. Nous pouvons maintenant finir de prouver la proposition. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $v \in \xi^\perp$ tel que $z = y + v$. Posons

$$\tilde{\chi}_\varepsilon^\eta := \delta_\eta * \chi_\varepsilon$$

où $(\delta_\eta)_{\eta>0}$ est une famille d'approximation de l'unité régulière à support compact dans B_η . On va montrer que $\tilde{\chi}_\varepsilon^\eta(y) = \tilde{\chi}_\varepsilon^\eta(y+v)$. Pour cela introduisons la fonction :

$$\begin{aligned} g: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \tilde{\chi}_\varepsilon^\eta(y + tv) \end{aligned}$$

g est régulière et

$$g'(t) = v \cdot \nabla \tilde{\chi}_\varepsilon^\eta(y + tv) = \int_{\mathbb{R}^d} v \cdot \nabla [\delta_\eta * \rho_\varepsilon](y + tv - s) \chi(s, \xi) ds.$$

Par convexité de Ω , le segment liant y à z est dans Ω et quitte à prendre η et ε assez petit $\delta_\eta * \rho_\varepsilon$ est dans $C_0^\infty(\Omega)$. Par conséquent, la relation (11) impose $g'(t) = 0$. En particulier, $\tilde{\chi}_\varepsilon^\eta(y) = g(0) = g(1) = \tilde{\chi}_\varepsilon^\eta(z)$. Comme χ_ε est continue, passant à la limite en η , on obtient ponctuellement

$$\chi_\varepsilon(y) = \chi_\varepsilon(z).$$

Comme y est un point de Lebesgue de $\chi(\cdot, \xi)$ passant à la limite en ε

$$1 = \chi(y, \xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi_\varepsilon(z).$$

Comme $\chi_\varepsilon(z) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$, z est également un point de Lebesgue pour $\chi(\cdot, \xi)$ et $\chi(z, \xi) = 1$.

Comme z est également un point de Lebesgue de m , on peut écrire :

$$\begin{aligned} m(z) \cdot \xi &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(z)} m(x) \cdot \xi dx \\ &\geq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(z) \cap \{m \cdot \xi > 0\}} m(x) \cdot \xi dx + \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(z) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}} m(x) \cdot \xi dx \end{aligned}$$

Mais reprenant l'argument du lemme I.11,

$$\left| \int_{B_r(z) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}} m(x) \cdot \xi dx \right| \leq \frac{|B_r(z) \cap \{m \cdot \xi \leq 0\}|}{|B_r|} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

donc

$$m(z) \cdot \xi \geq 0,$$

ce qui prouve la première partie de la proposition. Pour conclure, remarquons que pour presque tout x dans Ω , x est un point de Lebesgue de m et $|m(x)| = 1$. Ensuite, pour \mathcal{H}^{d-1} -p.p. direction ξ dans \mathbb{S}^{d-1} , $m(x) \cdot \xi \neq 0$ et $x + v$ est un point de Lebesgue de m pour \mathcal{H}^{d-1} -p.p. $v \in \xi^\perp$ avec $[x, x + v] \subset \Omega$. Par ce qui précède, ceci prouve (19). \square

Le lemme suivant va permettre de donner un sens à la trace de m le long d'une droite.

Proposition I.13. *Pour simplifier les notations, on supposera ici que $\Omega = \mathbb{R}^d$. Soit $L := [-1, 1] \times \{0\}^{d-1}$. Il existe une fonction \tilde{m} de x_1 mesurable et bornée, trace de m sur L au sens où :*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(2r)^{d-1}} \int_{[-r, r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |m(x_1, x') - \tilde{m}(x_1)| dx_1 dx' = 0. \quad (22)$$

De plus, pour \mathcal{H}^1 presque tout $x_1 \in [-1, 1]$,

$$\tilde{m}(x_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(2r)^{d-1}} \int_{[-r, r]^{d-1}} m(x_1, x') dx' \quad \text{et} \quad |\tilde{m}(x_1)| = 1 \quad (23)$$

Enfin, pour \mathcal{H}^1 presque tout $x \in L \setminus E$, $m(x) = \tilde{m}(x_1)$.

Démonstration. Notons D l'ensemble des directions $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ pour lesquelles $\xi_1 \neq 0$ et l'égalité (19) est vraie pour le triplet (x, ξ, v) pour presque tout $y \in \Omega$ et \mathcal{H}^{d-1} -p.p. $v \in \xi^\perp$ (avec le segment $[x, x+v] \subset \Omega$). Par la proposition I.12, on sait que D recouvre \mathbb{S}^{d-1} à un ensemble de \mathcal{H}^{d-1} mesure nulle près. Pour un tel vecteur $\xi \in D$, il existe $y_\xi \in \Omega$ (dans un voisinage de L) tel que pour \mathcal{H}^1 presque tout $t \in \mathbb{R}$, le point $y_\xi + t\xi \in \Omega$ est un point de Lebesgue de $\chi(\cdot, \xi)$, et la relation (19) est vérifiée pour $(y_\xi + t\xi, \xi, v)$ pour \mathcal{H}^{d-1} presque tout v dans ξ^\perp et la fonction d'une variable

$$\tilde{\chi}(\cdot, \xi) : t \mapsto \tilde{\chi}(t + y_\xi \cdot \xi, \xi) := \chi(y_\xi + t\xi, \xi) \in \{0, 1\}$$

est \mathcal{H}^1 mesurable. Par conséquent, pour presque tout $x \in \Omega$ dans un voisinage de L ,

$$\tilde{\chi}(x \cdot \xi, \xi) = \chi(y_\xi - y_\xi \cdot \xi \xi + x \cdot \xi \xi, \xi) \stackrel{(19)}{=} \chi(x, \xi), \quad (24)$$

puisque $v = y_\xi - y_\xi \cdot \xi \xi + x \cdot \xi \xi - x \in \xi^\perp$.

Notons $x' = (x_2, \dots, x_d)$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{[-r, r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |\chi(x, \xi) - \tilde{\chi}(x_1 \xi_1, \xi)| dx_1 dx' \\ = \int_{[-r, r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |\tilde{\chi}(x_1 \xi_1 + x' \cdot \xi', \xi) - \tilde{\chi}(x_1 \xi_1, \xi)| dx_1 dx' \\ \leq \frac{1}{|\xi_1|} \sup_{|y_2| \leq (d-1)r} \int_{-\xi_1}^{\xi_1} |\tilde{\chi}(y_1 + y_2, \xi) - \tilde{\chi}(y_1, \xi)| dy_1. \end{aligned}$$

La fonction $y \mapsto \tilde{\chi}(y, \xi)$ est bornée et mesurable donc admet un L^1 -module de continuité et le membre de droite de l'équation précédente tend vers 0 lorsque r tend vers 0 et donc :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(2r)^{d-1}} \int_{[-r, r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |\chi(x, \xi) - \tilde{\chi}(x_1 \xi_1, \xi)| dx_1 dx' = 0.$$

On vient de fabriquer une trace pour χ au sens défini en début de lemme. Cela nous fournit également une trace pour m . En effet, grâce au lemme 15,

$$m(x) = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \chi(x, \xi) d\sigma(\xi). \quad (25)$$

La trace obtenue pour χ fournit donc une trace pour m : il suffit de poser

$$\tilde{m}(x_1) = c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \xi \tilde{\chi}(x_1 \xi_1, \xi) d\sigma(\xi).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{[-r, r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |m(x_1, x') - \tilde{m}(x_1)| dx_1 dx' \\ \leq c_d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{[-r, r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |\chi(x, \xi) - \tilde{\chi}(x_1 \xi_1, \xi)| dx_1 dx' d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Pour r tendant vers 0, le membre de droite tend vers 0 par convergence dominée, ce qui prouve la première partie du lemme. Prouvons maintenant (23). Pour la première partie, il suffit de remarquer que :

$$\int_{-1}^1 \left| \tilde{m}(x_1) - \oint_{[-r,r]^{d-1}} m(x_1, x') dx' \right| dx_1 \leq \oint_{[-r,r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |\tilde{m}(x_1) - m(x_1, x')| dx_1 dx'.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(2r)^{d-1}} \int_{[-r,r]^{d-1}} m(x_1, x') dx' \xrightarrow{r \rightarrow 0} \tilde{m}(x_1) \quad \text{dans } L^1([-1, 1])$$

Pour une sous-suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a donc :

$$\frac{1}{(2r_k)^{d-1}} \int_{[-r_k, r_k]^{d-1}} m(x_1, x') dx' \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{m}(x_1) \quad \mathcal{H}^1\text{-presque partout},$$

ce qui prouve la première égalité dans (23). On prouve la seconde en écrivant

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 ||\tilde{m}(x_1)| - 1| dx_1 &= \oint_{[-r,r]^{d-1}} \int_{-1}^1 ||\tilde{m}(x_1)| - |m(x_1, x')|| dx_1 dx' \\ &\leq \oint_{[-r,r]^{d-1}} \int_{-1}^1 |\tilde{m}(x_1) - m(x_1, x')| dx_1 dx' \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

donc \mathcal{H}^1 -presque partout dans $[-1, 1]$, $|\tilde{m}(x_1)| = 1$.

Il reste à montrer que pour \mathcal{H}^1 presque tout $x \in L \setminus E$, $m(x) = \tilde{m}(x_1)$. Pour cela, posons

$$f_r(x_1) := \oint_{[-r,r]^{d-1}} m(x_1, x') dx' - \tilde{m}(x_1)$$

et pour $\alpha > 0$, $|r| < \alpha$ et $s \in [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$,

$$F_r(s) := \oint_{s-r}^{s+r} f_r(x_1) dx_1.$$

Alors, $F_r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ presque partout sur $[-1 + \alpha, 1 - \alpha]$. En effet,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1+\alpha}^{1-\alpha} F_r(s) ds \right| &\leq \int_{-1+\alpha}^{1-\alpha} \frac{1}{2r} |f_r(x_1)| \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{[s-r, s+r]}(x_1) dx_1 ds \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{1}{2r} |f_r(x_1)| \int_{-1+\alpha}^{1-\alpha} \mathbb{1}_{[x_1-r, x_1+r]}(s) ds dx_1 \\ &\leq \int_{-1}^1 |f_r(x_1)| dx_1 \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 d'après ce qui précède. Quitte à extraire une sous-suite, on a donc le résultat souhaité. Or

$$\left| \oint_{s+[-r,r]^d} m(x_1, x') dx - \oint_{s-r}^{s+r} \tilde{m}(x_1) dx_1 \right| \leq F_r(s)$$

où $s + [-r, r]^d := \{x \in \mathbb{R}^d : |x_1 - s| \leq r \text{ et } x' \in [-r, r]^{d-1}\}$. Mais si $x := (s, x')$ est un point de Lebesgue de m ,

$$\int_{s+[-r,r]^d} m(x_1, x') dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} m(x)$$

et si s est un point de Lebesgue de \tilde{m} ,

$$\int_{s-r}^{s+r} \tilde{m}(x_1) dx_1 \xrightarrow{r \rightarrow 0} \tilde{m}(s)$$

Passant à la limite en r , ceci prouve la dernière partie de la proposition. \square

8.1 Définitions alternatives de la trace

Remarquons que dans ce qui précède, on aurait pu procéder légèrement différemment. Par exemple, on montre de même qu'il existe une fonction mesurable et bornée g de x_1 telle que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{d-1}} \int_{[0,r] \times [-r,r]^{d-2}} \int_{-1}^1 |m(x_1, x') - g(x_1)| dx_1 dx' = 0$$

g est alors la trace de m sur L au sens suivant : pour presque tout $x_1 \in [-1, 1]$,

$$g(x_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r(2r)^{d-2}} \int_{[0,r] \times [-r,r]^{d-2}} m(x_1, x') dx'$$

On peut de même définir une trace en prenant pour intervalle $[-r, r] \times [0, r] \times [-r, r]^{d-3}$, ou $[-r, r]^2 \times [0, r] \times [-r, r]^{d-4}$, etc... Montrons que ces différentes définitions donnent la même trace. On va se contenter de montrer que la trace définie à la proposition I.13 et la trace définie ci-dessus coïncident.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |g(x_1) - \tilde{m}(x_1)| \\ & \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{r(2r)^{d-2}} \int_{[0,r] \times [-r,r]^{d-2}} m(x_1, x') dx' - \frac{1}{(2r)^{d-1}} \int_{[-r,r]^{d-1}} m(x_1, x') dx' \right| dx_1 \\ & \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{(2r)^{d-1}} \int_{-1}^1 \int_{[0,r] \times [-r,r]^{d-2}} |m(x_1, x') - m(-x_1, x')| dx' dx_1 = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\tilde{m} = g$ presque partout. Les différentes notions de trace ainsi définies sont donc équivalentes.

9 Preuve du théorème I.8 : cas d'un ouvert convexe

On va commencer par prouver des lemmes mettant en évidence les conséquences géométriques des relations (11) et (12).

Prouvons d'abord un lemme de constance le long des droites :

Lemme I.14. *Soit Ω un ouvert convexe tel que $L = [-1, 1] \times \{0\}^{d-1} \subset \Omega$ et $O \in \Omega \setminus E$. Si $m(O) = e_1$ alors pour presque tout $x_1 \in [-1, 1]$, $\tilde{m}(x_1) = \pm e_1$ où \tilde{m} est la trace définie à la proposition I.13.*

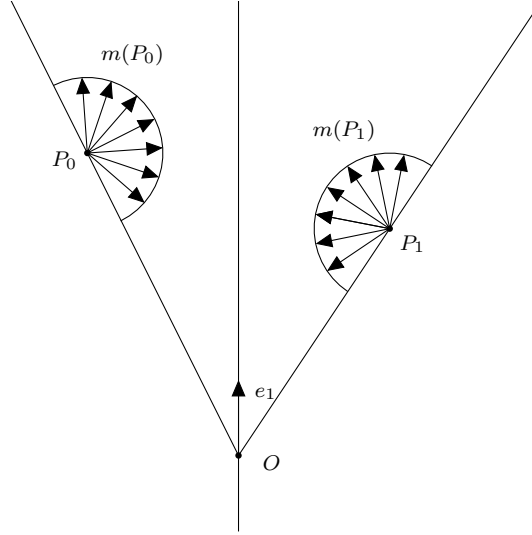


FIGURE 1 – Constance le long d'une droite

Démonstration. Prenons $x_1 \in [-1, 1]$, $x_1 \neq 0$ un point de Lebesgue de \tilde{m} . On va montrer que toutes les composantes de $\tilde{m}(x_1)$ autres que la première sont nulles, ce qui conclura. Soit $\varepsilon > 0$ et $2 \leq i \leq d$, notons :

$$E_i^\pm = \{z \in \Omega \setminus E : z_1 = |x_1|, \varepsilon|x_1| \geq \pm z_i > 0\}.$$

Posons $y = -z_i e_1 + |x_1| e_i$. Pour $z \in E_i^+$, il est clair que $z \cdot y = 0$. Par convexité de Ω , le segment liant O à z est inclu dans Ω pour ε petit donc d'après le lemme I.12,

$$\begin{aligned} -z_i = m(O) \cdot y < 0 &\implies m(z) \cdot y < 0 \\ &\implies m_1(z)(-z_i) + m_i(z)|x_1| < 0 \\ &\implies m_i(z) < \frac{z_i}{|x_1|} m_1(z) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De même que pour $z \in E_i^-$,

$$\begin{aligned} -z_i = m(O) \cdot y > 0 &\implies m(z) \cdot y > 0 \\ &\implies m_1(z)(-z_i) + m_i(z)|x_1| > 0 \\ &\implies m_i(z) > \frac{z_i}{|x_1|} m_1(z) \geq -\varepsilon. \end{aligned}$$

Cela impose $\tilde{m}_i(x_1) = 0$ pour $i \neq 1$. Montrons-le en détail pour $i = 2$. On va utiliser la remarque suivant la proposition I.13 sur les définitions alternatives de la trace. On prend x_1 tel que :

$$\tilde{m}_2(x_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r(2r)^{d-2}} \int_{[0,r] \times [-r,r]^{d-2}} m_2(x_1, x') \, dx'$$

Pour r assez petit, $\{x_1\} \times [0, r] \times [-r, r]^{d-2} \subset E_2^+$ donc $\tilde{m}_2(x_1) \leq \varepsilon$. De même, on peut également écrire

$$\tilde{m}_2(x_1) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r(2r)^{d-2}} \int_{[-r,0] \times [-r,r]^{d-2}} m_2(x_1, x') \, dx'$$

Pour r assez petit, $\{x_1\} \times [-r, 0] \times [-r, r]^{d-2} \subset E_2^-$ donc $\tilde{m}_2(x_1) \geq -\varepsilon$. Passant à la limite pour ε tendant vers 0, $\tilde{m}_2(x_1) = 0$ presque partout. \square

Le lemme I.14 qu'on a par commodité formulé et démontré pour le segment de droite $L = [-1, 1] \times \{0\}^{d-1}$ est valable pour une droite quelconque et s'énonce en toute généralité ainsi :

Lemme I.15. *Soit Ω un ouvert convexe, D un segment de vecteur directeur unitaire e et $P \in (D \setminus E)$. Si $m(P) = e$ alors pour presque tout $x \in \Omega \cap D$, $\tilde{m}(x) = \pm e$.*

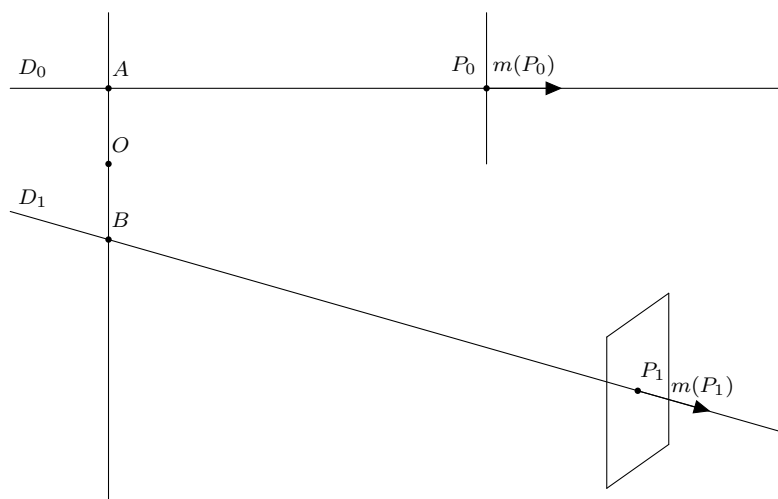
Démonstration. On le déduit directement du lemme I.14 par changement de base. \square

On peut maintenant prouver le théorème I.8 annoncé en début d'article :

Démonstration. Si m n'est pas constant, il existe deux points P_0 et P_1 dans $\Omega \setminus E$ tels que $m(P_0) \neq m(P_1)$. Appelons D_0 la droite affine dirigée par $m(P_0)$ et passant par P_0 et D_1 celle dirigée par $m(P_1)$ et passant par P_1 . Nous allons montrer par l'absurde que D_0 et D_1 sont coplanaires. Supposons ainsi que D_0 et D_1 ne sont pas coplanaires. Il existe alors une droite D orthogonale à D_0 et D_1 , passant par les points A et B déterminés par la relation :

$$d(A, B) = \min_{x \in D_0, y \in D_1} d(x, y).$$

On est donc dans la configuration de la figure 2 :

FIGURE 2 – D_0 et D_1 non coplanaires

Où on a noté O le milieu du segment AB . Posons maintenant $u_1 = m(P_0)$, $u_2 = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$ et $u_3 = \alpha u_1 + \beta m(P_1)$ où α et β sont choisis de manière à ce que la base u_1, u_2, u_3 soit orthonormée. Comme on a déjà que $u_2 \cdot u_3 = 0$, il suffit de trouver α et β tels que :

$$u_1 \cdot u_3 = 0 \quad \text{et} \quad |u_3|^2 = 1,$$

i.e.

$$\begin{cases} \alpha + \beta m(P_0) \cdot m(P_1) = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta m(P_0) \cdot m(P_1) + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

qui est encore équivalent à :

$$\begin{cases} \alpha = -\beta m(P_0) \cdot m(P_1) \\ \beta^2 (1 - (m(P_0) \cdot m(P_1))^2) = 1 \end{cases}$$

Et le système est vérifié en prenant par exemple $\alpha = -\frac{m(P_0) \cdot m(P_1)}{\sqrt{1 - (m(P_0) \cdot m(P_1))^2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (m(P_0) \cdot m(P_1))^2}} > 0$.

Dans la base orthonormée (u_1, u_2, u_3) , les vecteurs $m(P_0)$ et $m(P_1)$ ont pour composantes :

$$m(P_0) = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad m(P_1) = \left(-\frac{\alpha}{\beta}, 0, \frac{1}{\beta}\right).$$

D'autre part, comme

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_0A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_1},$$

il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ et λ_3 tels que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1} &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 m(P_1) \\ &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 \left(\frac{1}{\beta} u_3 - \frac{\alpha}{\beta} u_1 \right). \end{aligned}$$

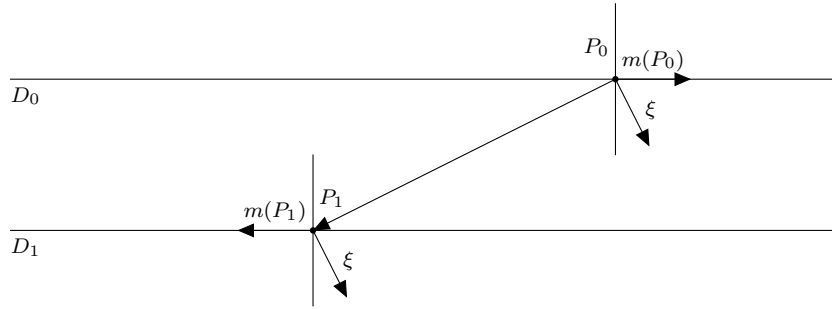
$\overrightarrow{P_0P_1}$ a donc pour composantes dans la base (u_1, u_2, u_3) :

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_3, \lambda_2, \frac{\lambda_3}{\beta} \right).$$

Posons maintenant $v := (1, s, -1)$ où $s := \frac{-1}{\lambda_2} \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_3}{\beta} (\alpha + 1) \right)$ et $\xi := \frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Alors,

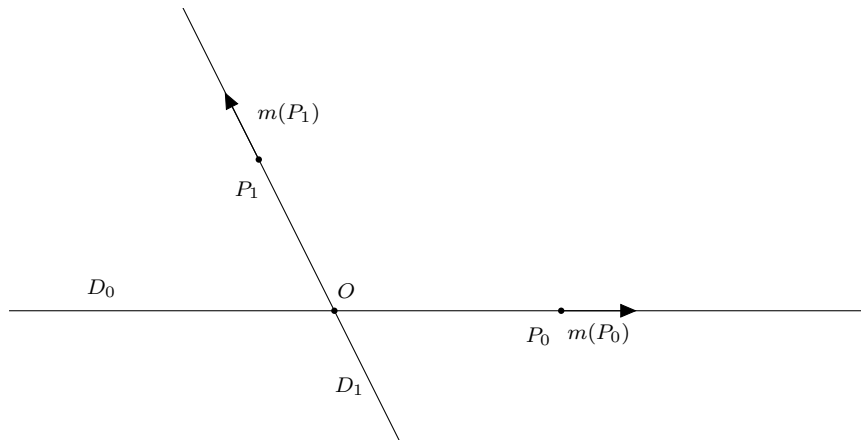
$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P_1} \cdot \xi &= \frac{1}{|v|} \left(\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_3 - \left(\lambda_1 - \frac{\lambda_3}{\beta} (\alpha + 1) \right) - \frac{\lambda_3}{\beta} \right) = 0, \\ m(P_0) \cdot \xi &= \frac{1}{|v|} > 0, \\ m(P_1) \cdot \xi &= \frac{-1}{\beta |v|} < 0. \end{aligned}$$

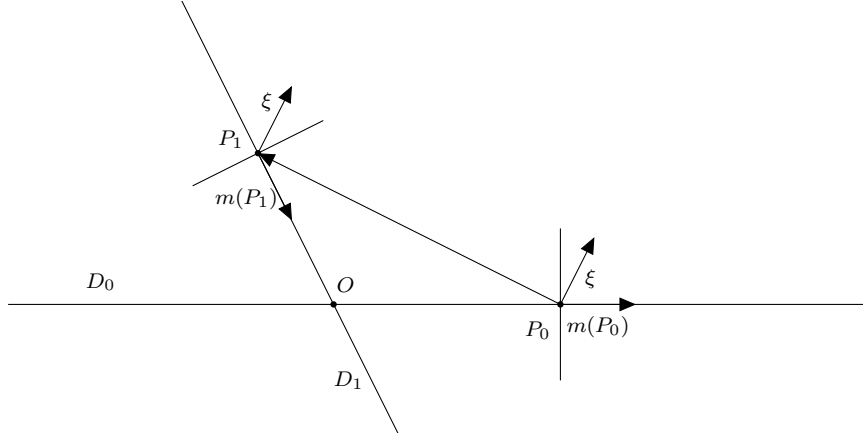
Ce qui contredit la proposition I.12. On a donc prouvé par l'absurde que D_0 et D_1 sont nécessairement coplanaires.

FIGURE 3 – D_0 et D_1 parallèles mais non confondues

Montrons maintenant que D_0 et D_1 sont soit confondues, soit concourantes. En effet, si l'on n'est dans aucun de ces deux cas, les droites D_0 et D_1 sont parallèles sans être confondues et comme on a supposé $m(P_0) \neq m(P_1)$, quitte à changer m en $-m$ on est dans la configuration de la figure 3 :

C'est absurde puisque alors $\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \xi = 0$, $m(P_0) \cdot \xi > 0$ et $m(P_1) \cdot \xi < 0$. Traitons d'abord le cas où les droites D_0 et D_1 sont concourantes. Si les droites D_0 et D_1 se coupent en un point O quitte à changer m en $-m$, seules deux configurations sont possibles : celle de la figure 4 et celle de la figure 5.

FIGURE 4 – D_0 et D_1 concourantes : configuration 1

FIGURE 5 – D_0 et D_1 concourantes : configuration 2

Comme illustré sur la figure 5, la seconde configuration est impossible puisqu'on a $m(P_0) \cdot \xi > 0$, $m(P_1) \cdot \xi < 0$ et $\overrightarrow{P_0 P_1} \cdot \xi = 0$. Prouvons-le en passant en coordonnées. Notons $u_1 = m(P_0)$ et $u_2 = \alpha u_1 + \beta m(P_1)$ où α et β sont choisis de manière à ce que (u_1, u_2) soit une base orthonormée. Des calculs identiques à ceux faits au début de cette preuve dans le cas où D_0 et D_1 ne sont pas coplanaires montrent que $\alpha = -\frac{m(P_0) \cdot m(P_1)}{\sqrt{1 - (m(P_0) \cdot m(P_1))^2}}$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - (m(P_0) \cdot m(P_1))^2}} > 0$ conviennent. Dans cette base,

$$m(P_0) = (1, 0) \quad \text{et} \quad m(P_1) = \left(-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Écrivant

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \overrightarrow{P_0 O} + \overrightarrow{O P_1},$$

il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que : $\overrightarrow{P_0 P_1} = \lambda_1 m(P_0) + \lambda_2 m(P_1)$. $\overrightarrow{P_0 P_1}$ a donc pour composante dans la base (u_1, u_2) :

$$\overrightarrow{P_0 P_1} = \left(\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_2, \frac{\lambda_2}{\beta}\right).$$

Montrer que la configuration de la figure 5 ne peut advenir équivaut à montrer que :

$$\lambda_1 \leq 0 \implies \lambda_2 \geq 0.$$

Par l'absurde, si $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_2 < 0$, posons $v := (1, s)$ où $s := -\frac{\beta}{\lambda_2}(\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_2)$ et $\xi = \frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_1} \cdot \xi &= \frac{1}{|v|} \left(\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_2 - (\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_2) \right) = 0, \\ m(P_0) \cdot \xi &= \frac{1}{|v|} > 0, \\ m(P_1) \cdot \xi &= \frac{1}{|v|} \left(-\frac{\alpha}{\beta} - \frac{1}{\lambda_2} (\lambda_1 - \frac{\alpha}{\beta} \lambda_2) \right) = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 |v|} \leq 0. \end{aligned}$$

Ce qui contredit la proposition I.12. On est donc nécessairement dans la configuration de la figure 4. Concluons maintenant la preuve du théorème I.8. C'est ici que le fait qu'on soit en dimension strictement plus grande que 2 va intervenir. Soit P_2 un point de Lebesgue pour m qui n'est pas dans le plan contenant D_0 et D_1 . Alors $m(P_2) \neq m(P_0)$ ou $m(P_2) \neq m(P_1)$. Supposons pour fixer les idées que $m(P_2) \neq m(P_0)$. Notons D_2 la droite dirigée par $m(P_2)$ passant par P_2 . Par l'analyse faite précédemment, D_0 et D_2 sont coplanaires et comme P_2 n'est pas sur D_0 , elles ne sont pas confondues donc se coupent en un point O . Mais ceci impose $m(P_2) \neq m(P_1)$ et D_2 et D_1 se coupent. Il est clair que comme D_2 coupe à la fois D_0 et D_1 et n'est pas dans le plan engendré par $(m(P_0), m(P_1))$, elle ne peut les couper qu'en O et l'analyse faite précédemment montre que $m(P_2) = \frac{\overrightarrow{OP_2}}{|\overrightarrow{OP_2}|}$. Ceci étant vrai pour tout point de Lebesgue en dehors du plan engendré par $m(P_0)$ et $m(P_1)$, on vient de prouver que si m n'est pas constant, $m(P) = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$ presque partout et le théorème est prouvé.

Pour être tout à fait exhaustif, il nous faudrait également traiter le cas où les droites D_0 et D_1 sont confondues que nous avons mentionné précédemment. Il suffit de prendre un point de Lebesgue en dehors de la droite D_0 et on se ramène au cas déjà traité. \square

10 Preuve du théorème I.8 : cas d'un ouvert connexe

Nous pouvons maintenant finalement prouver le théorème I.8. Remarquons tout d'abord que si on suppose Ω non connexe, le théorème I.8 est faux : il est facile de construire des champs vérifiant (11) et (12) mais qui ne sont ni constants, ni des vortex : il suffit par exemple de prendre une constante distincte sur chacune des composantes connexe ou bien un vortex sur une composante et des constantes sur les autres.

Énonçons pour commencer un lemme facile.

Lemme I.16. *Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^d , B une boule ouverte incluse dans Ω et m un champ mesurable vérifiant (11) et (12) sur Ω . Fixons $m_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\alpha \in \{-1, 1\}$ et $P \in \mathbb{R}^d$.*

Si $m = m_0$ sur B , alors $m = m_0$ sur Ω entier et si $m = \alpha \frac{x-P}{|x-P|}$ sur B alors $m = \alpha \frac{x-P}{|x-P|}$ sur Ω entier.

Autrement dit la connaissance d'une fonction vérifiant les relations (11) et (12) sur un ouvert convexe Ω quelconque est déterminé par son comportement sur une boule.

Démonstration. D'après le théorème I.8, comme les relations (11) et (12) sont vérifiées sur Ω entier, soit il existe $m_1 \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $m = m_1$ sur Ω , soit il existe $\alpha_1 \in \{-1, 1\}$ et un point P_1 de \mathbb{R}^d tels que $m = \alpha_1 \frac{x-P_1}{|x-P_1|}$ sur Ω . Si $m = m_0$ sur B , on est dans le premier cas est $m_1 = m_0$. Si $m = \alpha \frac{x-P}{|x-P|}$ sur B , on est dans le second cas, $\alpha_1 = \alpha$ et $P_1 = P$, ce qui prouve le lemme. \square

On peut maintenant finir de prouver le théorème I.8.

Démonstration. Sur chacune des parties convexes de Ω , le champ est déterminé grâce au cas d'un ouvert convexe traité précédemment. Supposons qu'il existe deux parties convexes C_1 et C_2 et deux champs de vecteurs distincts m_0 et m_1 tels que $m = m_1$ sur C_1 et $m = m_2$ sur C_2 . Par connexité de Ω , ces deux composantes ont un point x de leur frontière en commun. Il existe alors $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$, $B(x, r) \cap C_1 \neq \emptyset$ et $B(x, r) \cap C_2 \neq \emptyset$. Mais alors, par convexité de C_1 , il existe $B' \subset B(x, r) \cap C_1$. sur B' , $m = m_1$. D'après le lemme précédent, on devrait donc avoir $m = m_1$ sur $B(x, r)$. C'est absurde puisque $B(x, r)$ intersecte C_2 .

□

Deuxième partie

Une généralisation de la notion d'entropie

Sommaire

11	Introduction	36
12	Principaux résultats	37
13	Préambule	41
13.1	Opérateurs $D_{i,j}$	41
13.1.1	Démonstration du lemme II.4	41
13.2	Fonctions $u_{i,j}$	43
14	Entropie	44
14.1	Un exemple d'entropie en dimension 2	45
14.2	Un exemple d'entropie en dimension quelconque	46
15	Propriétés des entropies régulières	54
15.1	Démonstration du théorème II.6	55
15.2	Démonstration du théorème II.7	58
16	Caractérisation des entropies régulières	59
16.1	Démonstration du théorème II.10	59
16.2	Le cas de la dimension 3	61
16.2.1	Démonstration du théorème II.11	61
16.2.2	Démonstration du corollaire II.12	65
16.2.3	Démonstration du théorème II.13	69
17	Bilan et Perspectives	70

11 Introduction

La notion d'*entropie* au sens où nous l'utiliserons ici apparaît dans les articles [5] d'Aviles et Giga et [29] de Jin et Kohn. Dans l'article de [29] de Jin et Kohn, Ω étant un ouvert de \mathbb{R}^2 , les auteurs s'intéressent à la minimisation de l'énergie suivante :

$$AG_\varepsilon(m) := \int_{\Omega} \varepsilon |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - |m|^2)^2 \quad (26)$$

où m est de rotationnel nul avec certaines conditions de bord. Plus précisément, ils sont intéressés par le comportement asymptotique de cette énergie lorsque ε tend vers 0 et remarquent qu'en introduisant la fonction :

$$\Phi(x_1, x_2) := 2\left(-\frac{1}{3}x_1^3 - x_1(x_2^2 - 1), \frac{1}{3}x_2^3 + x_2(x_1^2 - 1)\right),$$

pour m de rotationnel nul, on a la relation :

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] = 2(1 - |m|^2)(\partial_1 m_1 - \partial_2 m_2), \quad (27)$$

d'où

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] \leq \frac{1}{\varepsilon} (1 - |m|^2)^2 + \varepsilon |\nabla m|^2 - 2\varepsilon (\partial_1 m_1 \partial_2 m_2 - (\partial_1 m_2)^2). \quad (28)$$

En intégrant les deux membres, on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [h \circ m] \leq AG_\varepsilon(m) - 2\varepsilon \int_{\Omega} (\partial_1 m_1 \partial_2 m_2 - (\partial_1 m_2)^2). \quad (29)$$

Comme

$$\int_{\Omega} (\partial_1 m_1 \partial_2 m_2 - (\partial_1 m_2)^2) = \int_{\Omega} \nabla \cdot \begin{pmatrix} -m_2 \partial_1 m_2 \\ m_2 \partial_1 m_1 \end{pmatrix} = \int_{\partial\Omega} m_2 (\partial_1 m)^\perp \cdot n,$$

si on s'intéresse à la minimisation de AG_ε avec comme condition de bord $m = n$ où n désigne la normale au bord de Ω , ce dernier terme est contrôlé et la relation (29) nous donne une borne inférieure pour l'énergie. Dans certain cas, un ansatz adéquat nous permet de construire une suite de fonction $(m_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ pour laquelle l'énergie asymptotique est du même ordre que la borne inférieure fournie par Φ , ce qui donne le comportement asymptotique de l'énergie.

L'obtention de la borne inférieure repose donc sur l'inégalité (28) donnée par la fonction Φ . Ce genre d'inégalité peut s'obtenir non seulement pour la fonction Φ précédente mais pour une classe de fonction bien plus large : les *entropies*. Nous reprenons ici la définition donnée par Ignat et Merlet dans [22].

Définition II.1. On appelle *entropie* une fonction régulière $\Phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et telle que pour tout x dans \mathbb{S}^1

$$\langle \partial_\theta \Phi(x), x \rangle = 0,$$

où $x = e^{i\theta}$.

Toute entropie donne une inégalité du type de l'inégalité (29), mais obtenir une inégalité *optimale* pour l'énergie AG_ε lorsque ε tend vers 0 demande une compatibilité entre la condition de bord imposée et l'entropie choisie. On renvoie le lecteur à [29] pour plus de détails sur cette question. La notion d'entropie est féconde et a été utilisée à des fins très diverses : par Ignat et Merlet dans [22] et [21] pour prouver des résultats de semi-continuité inférieure de fonctionnelles liées au micromagnétisme. De Simone, Kohn, Müller et Otto l'utilisent dans [14] associée à des outils issus des mesures de Young pour prouver un résultat de compacité des minimiseurs de l'énergie AG_ε . De Lellis et Otto l'utilisent dans [13] pour définir un espace de fonctions pour lequel ils prouvent des propriétés proches de celles des espaces BV .

Dans l'article [19] de Ignat, enfin, et c'est sur cet aspect que nous nous sommes focalisés, les entropies sont utilisées pour montrer le théorème I.4 que nous avons mentionné dans le premier chapitre, à savoir, le fait que pour Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et p dans $[1, 3]$, les champs dans

$$W_{div}^{1/p,p}(\Omega, \mathbb{S}^1) := \{m \in W^{1/p,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) : \nabla \cdot m = 0 \text{ et } |m| = 1\}$$

vérifient la formulation cinétique :

$$\forall \xi \in \mathbb{S}^1 \quad \xi \cdot \nabla \chi(\cdot, \xi) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

où comme dans le premier chapitre,

$$\chi(\cdot, \xi) := \begin{cases} 1 & \text{si } m(x) \cdot \xi > 0, \\ 0 & \text{si } m(x) \cdot \xi \leq 0. \end{cases}$$

Cette formulation cinétique a, comme nous l'avons vu, des propriétés régularisantes pour le champ m et est la clef du théorème I.5 issu de [12].

Nous avons trouvé dans le premier chapitre une formulation cinétique ayant des effets régularisants en dimension quelconque ; pour espérer obtenir des résultats analogues au théorème I.5 en dimension supérieure, il était donc naturel d'essayer d'étendre la notion d'entropie en dimension plus grande que 2.

Avant de poursuivre, nous allons donner une propriété des entropies qu'on peut également prendre comme définition alternative : c'est par exemple celle qui est prise dans l'article [13] de De Lellis et Otto.

Proposition II.2. $\Phi: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une entropie si et seulement si pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et toute fonction régulière $m: \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$,

$$\nabla \cdot m = 0 \implies \nabla \cdot [\Phi \circ m] = 0.$$

Le lien entre la définition II.1 et la proposition II.2, notamment le fait qu'elles sont équivalentes sera discuté plus en détail dans la section 14.

12 Principaux résultats

Définition II.3. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et i, j dans $\{1, \dots, d\}$, on définit les opérateurs :

$$D_{i,j} := x_i \partial_j - x_j \partial_i. \tag{30}$$

Ces opérateurs s'interprètent en terme de dérivées angulaires, de sorte qu'on peut les faire agir sur les fonctions de $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$. Plus précisément,

Lemme II.4. *Pour x dans \mathbb{S}^{d-1} et $1 \leq i < j \leq d$,*

$$D_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \theta_{i,j}} \quad (31)$$

où $\theta_{i,j}$ est l'angle dans le plan engendré par (e_i, e_j) .

Nous renvoyons au préambule pour la preuve de ce lemme et pouvons maintenant donner notre définition d'entropie :

Définition II.5. *On appelle entropie une fonction $\Phi \in L^1(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $1 \leq i < j \leq d$*

$$\forall \zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}) \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(x) D_{i,j} [x_i \zeta] (x) d\sigma \quad (32)$$

où σ désigne la mesure uniforme sur la sphère \mathbb{S}^{d-1} .

On notera par la suite **ENT** l'ensemble des entropies et $\mathbf{ENT}_{reg} := \mathbf{ENT} \cap C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$ l'ensemble des entropies régulières.

Nous verrons qu'avec cette définition, il existe des entropies en toute dimension et que déjà en dimension 2, la fonction considérée comme une *entropie élémentaire* en tant que limite ponctuelle d'entropie dans l'article [14] de DeSimone, Kohn, Müller et Otto est bien une entropie au sens précédent : c'est l'objet du premier exemple de la section 14.

Remarquons également qu'il n'est pas tout à fait clair que cette définition soit équivalente à la définition II.1 d'entropie si $d = 2$ et que Φ est une fonction régulière. C'est bien le cas et c'est l'objet de la remarque II.26.

Une fois cette définition posée, nous montrons qu'en étendant radialement une entropie régulière h avec la formule :

$$\tilde{\Phi}(x) = \rho(|x|) \Phi \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

où ρ désigne une fonction régulière vérifiant $\rho(1) = 1$ (voir la définition II.27), on a le théorème attendu pour nos entropies, à savoir :

Théorème II.6. *Soit $\tilde{\Phi} \in \mathbf{ENT}_{reg}$. Il existe une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telle que pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^d et tout champ m dans $C_{rot}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$,*

$$\nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \langle \psi(m), \nabla [|m|^2 - 1] \rangle \quad (33)$$

où \mathbf{ENT}_{reg} désigne l'ensemble des entropies régulières prolongées radialement. D'où on déduit que si Φ est une entropie régulière, on a le théorème suivant :

Théorème II.7. *Soit $\Phi \in \mathbf{ENT}_{reg}$, Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et $m \in C_{rot}^\infty(\Omega, \mathbb{S}^{d-1})$. Alors, pour tout x dans Ω*

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] (x) = 0.$$

À la lumière de la proposition II.2, le théorème précédent soulève une question naturelle :

Conjecture II.8. *Si Φ est une fonction dans $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$ telle que pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^d et tout champ m dans $C_{\text{rot}}^\infty(\Omega, \mathbb{S}^{d-1})$,*

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] = 0, \quad (34)$$

Φ est-elle nécessairement une entropie ?

Cette conjecture est *vraie* si $d = 2$: c'est la proposition II.2. Nous la pensons également vraie dans notre cas, bien que nous n'en ayons pas encore de preuve.

Nous consacrons la section 15 à prouver un certain nombre de théorème permettant de caractériser les entropies régulières, notre but étant de pouvoir exhiber des exemples d'entropie régulière en dimension $d > 2$. Nous avons pour cela besoin de la définition suivante :

Définition II.9. *Pour i, j dans $\{1, \dots, d\}$, posons :*

$$\begin{aligned} u_{i,j} &: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto x_i e_j - x_j e_i \end{aligned}$$

Ces fonction sont liées aux opérateurs $D_{i,j}$ définis précédemment ; nous y reviendrons dans la section 13. On montre alors qu'en dimension quelconque, on a le théorème suivant :

Théorème II.10. *Soit Φ dans $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$ et désignons par A_d l'ensemble des matrices antisymétriques de \mathbb{R}^d . Alors,*

$$\Phi = (\alpha \text{id} + \beta)x \quad (35)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &:= \langle \Phi(x), x \rangle \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d), \\ \text{et} \\ \beta &:= \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \Phi(x), u_{p,q}(x) \rangle (\delta_{q,p} - \delta_{p,q}) \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, A_d). \end{aligned}$$

$\Phi \in \mathbf{ENT}_{\text{reg}}$ si et seulement si α et β sont solutions du système de $\binom{d}{2}$ équations aux dérivées partielles : pour tout $1 \leq i < j \leq d$,

$$\alpha |u_{i,j}|^2 = \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle u_{p,q}, u_{i,j} \rangle D_{i,j} \beta_{p,q} \quad (36)$$

où $\beta = (\beta_{p,q})$. On a de plus l'identité suivante :

$$\alpha = \frac{1}{d-1} \sum_{1 \leq p < q \leq d} D_{p,q} \beta_{p,q}. \quad (37)$$

Si $d > 2$, ce théorème semble malheureusement inutilisable pour construire des entropies régulières. Nous avons donc consacré une partie de nos efforts à comprendre ce qui se passe en dimension 3 : c'est l'objet des deux théorèmes et du corollaire suivants.

Théorème II.11. *Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$. Écrivons en coordonnées sphériques sur \mathbb{S}^2 :*

$$\Phi = \alpha \mathbf{r} + a \boldsymbol{\theta} + b \boldsymbol{\varphi}$$

où

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $P_0 := (0, 0, 1)$, $P_1 := (0, 0, -1)$, $\tilde{a} := \frac{a}{\sin \theta}$ et $\tilde{b} := \frac{b}{\sin \theta}$.

Alors, si Φ est une entropie $(\alpha, \tilde{a}, \tilde{b})$ vérifient sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$:

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ \partial_\varphi \tilde{a} = -\sin \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ \partial_\varphi \tilde{b} = \sin \theta \partial_\theta \tilde{a} \end{cases} \quad (38)$$

et de plus, sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} \tilde{a} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbb{S}^2} \tilde{b} = 0.$$

Corollaire II.12. *Soit Φ une entropie sur \mathbb{S}^2 . Alors,*

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{1,2} \rangle}{|u_{1,2}|^2} \right) (x) &= 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,2}| = 0\}, \\ \Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{1,3} \rangle}{|u_{1,3}|^2} \right) (x) &= 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,3}| = 0\}, \\ \Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{2,3} \rangle}{|u_{2,3}|^2} \right) (x) &= 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{2,3}| = 0\}. \end{aligned}$$

Théorème II.13. *Soit $f = v + iu$ une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* et considérons la fonction Φ définie sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ par :*

$$\Phi(x) = \left(\frac{x_2}{1-x_3} \partial_1 v(P(x)) - \frac{x_1}{1-x_3} \partial_2 v(P(x)) \right) x + \begin{pmatrix} -x_2 v(P(x)) \\ x_1 v(P(x)) \\ -u(P(x)) \end{pmatrix}, \quad (39)$$

où P est la projection stéréographique par rapport à P_0 . Si Φ se prolonge en une fonction $\hat{\Phi}$ dans $C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, alors $\hat{\Phi}$ est une entropie régulière.

Cette section est la plus insatisfaisante puisque malgré les caractérisations précédentes et le fait qu'il existe des entropies en toute dimension, nous n'avons pas été capable d'exhiber d'entropie régulière autre que les entropies triviales en dimension $d > 2$. (On renvoie à II.25 pour la définition d'entropie triviale). En fait, le théorème précédent nous permet facilement de construire des entropies régulières *en dehors d'un point* sur \mathbb{S}^2 . Nous ne sommes pour le moment pas parvenu à prolonger l'une des entropies ainsi obtenue en une fonction régulière sur la sphère tout entière. Nous renvoyons le lecteur à la remarque II.33 pour plus de détails sur cette question.

13 Préambule

Dans cette première partie nous allons définir les outils dont nous allons avoir besoin pour donner notre définition d'entropie en dimension quelconque. Ces outils sont au nombre de deux : les opérateurs différentiels $D_{i,j}$ de la définition II.3, et les fonctions $u_{i,j}$ de la définition II.9.

13.1 Opérateurs $D_{i,j}$

Repartons de la définition II.3 : pour $i, j \in \{1, \dots, d\}$,

$$D_{i,j} = x_i \partial_j - x_j \partial_i.$$

Comme $D_{i,j} = -D_{j,i}$ et $D_{i,i} = 0$, il y a $\binom{d}{2}$ opérateurs $D_{i,j}$ indépendants et ils agissent sur les fonctions régulières de la manière suivante : pour f dans $C^1(\mathbb{R}^d)$,

$$D_{i,j}f(x) = x_i \partial_j f(x) - x_j \partial_i f(x).$$

De manière évidente, les opérateurs $D_{i,j}$ agissent également sur les fonctions f dans $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ en posant

$$D_{i,j}f(x) := (D_{i,j}f_1(x), \dots, D_{i,j}f_d(x)).$$

On peut maintenant prouver le lemme II.4.

13.1.1 Démonstration du lemme II.4

Démonstration. On veut donc prouver que :

$$D_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \theta_{i,j}}$$

où $\theta_{i,j}$ est l'angle dans le plan engendré par (e_i, e_j) . Cette égalité se prouve en prenant des coordonnées adaptées sur \mathbb{S}^{d-1} . Prouvons-la en dimension 2, le cas général étant analogue. En dimension 2, un calcul donne :

$$\partial_1 = \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \quad \partial_2 = \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta$$

d'où pour $x \in \mathbb{S}^1$,

$$D_{1,2} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 = r \cos \theta \partial_2 - r \sin \theta \partial_1 = r \partial_\theta = \partial_\theta.$$

ce qui conclut la preuve. □

Par définition, les opérateurs $D_{i,j}$ agissent sur les fonctions de $C^1(\mathbb{R}^d)$. L'égalité $D_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \theta_{i,j}}$ montrée dans le lemme II.4 montre qu'ils agissent également sur les fonctions

de $C^1(\mathbb{S}^{d-1})$. Précisons un peu de quelle manière. Pour $1 \leq i < j \leq d$ notons $Q_{i,j,\omega}$ la rotation d'angle ω dans le plan engendré par (e_i, e_j) et posons :

$$\begin{aligned} T(Q_{i,j,\omega})f(x) &= f(Q_{i,j,-\omega}x) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, \underbrace{x_i \cos \omega + x_j \sin \omega}_{i\text{-ème coordonnée}}, \dots, \underbrace{-x_i \sin \omega + x_j \cos \omega}_{j\text{-ème coordonnée}}, \dots, x_d). \end{aligned}$$

Pour $f \in C^1(\mathbb{S}^{d-1})$, on a alors l'identité

$$D_{i,j}f(x) = \frac{d(T(Q_{i,j,\omega})f)}{d\omega} \Big|_{\omega=0}(x). \quad (40)$$

Nous ne prouverons par la suite que les propriétés des opérateurs $D_{i,j}$ dont nous nous servons dans cette partie. Le lecteur intéressé par davantage de détails sur ces opérateurs, notamment leur lien avec la transformée de Fourier sur la sphère pourra consulter [10]. Les deux propositions suivantes sont des propriétés techniques des $D_{i,j}$ dont on fera usage par la suite.

Proposition II.14. *Pour $f, g \in C^1(\mathbb{R}^d)$, et i, j dans $\{1, \dots, d\}$*

$$D_{i,j}(fg) = fD_{i,j}g + gD_{i,j}f. \quad (41)$$

De même, pour $f, g \in C^1(\mathbb{S}^{d-1})$ et i, j dans $\{1, \dots, d\}$

$$D_{i,j}(fg) = fD_{i,j}g + gD_{i,j}f. \quad (42)$$

Démonstration. Il suffit de faire le calcul : fixons i, j dans $\{1, \dots, d\}$ et f, g dans $C^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} D_{i,j}(fg) &= x_i \partial_j(fg) - x_j \partial_i(fg) \\ &= x_i (g \partial_j f + f \partial_j g) - x_j (g \partial_i f + f \partial_i g) \\ &= fD_{i,j}g + gD_{i,j}f. \end{aligned}$$

Si f et g sont des fonctions définies sur \mathbb{S}^{d-1} , on les prolonge en deux fonctions régulières définies sur un voisinage ouvert de \mathbb{S}^{d-1} dans \mathbb{R}^d et on est ramené au cas précédent. \square

Proposition II.15. *Pour $f, g \in C^1(\mathbb{S}^{d-1})$ et i, j dans $\{1, \dots, d\}$,*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x) D_{i,j}g(x) d\sigma = - \int_{\mathbb{S}^{d-1}} D_{i,j}f(x) g(x) d\sigma. \quad (43)$$

Démonstration. Par invariance de la mesure de Lebesgue sur la sphère par rotation,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(Q_{i,j,\omega}x) g(x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x) g(Q_{i,j,-\omega}x) d\sigma.$$

Différenciant les deux membres par rapport à ω et évaluant en $\omega = 0$, on obtient l'identité souhaitée. \square

Cette propriété va nous permettre de donner du sens par dualité à l'expression $D_{i,j}f$ pour une fonction seulement dans $L^1(\mathbb{S}^{d-1})$.

13.2 Fonctions $u_{i,j}$

D'après la définition II.9, pour i, j dans $\{1, \dots, d\}$, on a $u_{i,j}(x) = x_i e_j - x_j e_i$. Ces fonctions sont liées aux opérateurs $D_{i,j}$ de la manière suivante : pour f dans $C^1(\mathbb{R}^d)$,

$$D_{i,j}f(x) = x_i \partial_j f(x) - x_j \partial_i f(x) = \langle \nabla f(x), u_{i,j}(x) \rangle.$$

De même, pour f dans $C^1(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$D_{i,j}f(x) = x_i \partial_j f(x) - x_j \partial_i f(x) = \langle \nabla f(x), u_{i,j}(x) \rangle.$$

où ∇f désigne dans cette deuxième égalité le gradient sur la sphère. Comme précédemment, on prouve cette seconde égalité par prolongement pour se ramener au cas de \mathbb{R}^d . Nous allons maintenant prouver quelques propriétés algébriques de la famille des $(u_{i,j})_{1 \leq i < j \leq d}$ dont nous ferons usage par la suite.

Proposition II.16. Notons $\delta_{i,j} := e_i \otimes e_j \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et A_d l'ensemble des matrices antisymétriques de \mathbb{R}^d . Alors, pour x dans \mathbb{R}^d ,

$$u_{i,j}(x) = (\delta_{j,i} - \delta_{i,j})x, \quad (44)$$

$$|x|^2 id = x \otimes x + \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \otimes u_{i,j}(x). \quad (45)$$

Si de plus x est dans \mathbb{S}^{d-1} , la famille de vecteurs $(u_{i,j}(x))_{1 \leq i < j \leq d}$ engendre l'espace tangent $T_x \mathbb{S}^{d-1}$.

Démonstration. L'identité (44) est immédiate : il suffit de remarquer que $\delta_{i,j}x = x_j e_i$ et

$$(\delta_{j,i} - \delta_{i,j})x = x_i e_j - x_j e_i = u_{i,j}(x).$$

Prouvons maintenant l'identité (45) :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \otimes u_{i,j}(x) &= \sum_{1 \leq i < j \leq d} (\delta_{j,i} - \delta_{i,j})x \otimes (\delta_{j,i} - \delta_{i,j})x \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq d} \delta_{j,i}x \otimes \delta_{j,i}x - \delta_{j,i}x \otimes \delta_{i,j}x - \delta_{i,j}x \otimes \delta_{j,i}x + \delta_{i,j}x \otimes \delta_{i,j}x. \end{aligned}$$

Or $\delta_{i,j}x \otimes \delta_{i,j}x = x_j^2 e_i \otimes e_i = x_j^2 \delta_{i,i}$ et $\delta_{i,j}x \otimes \delta_{j,i}x = x_j x_i e_i \otimes e_j = x_j x_i \delta_{i,j}$ donc

$$\sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \otimes u_{i,j}(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq d} x_i^2 \delta_{j,j} + x_j^2 \delta_{i,i} - x_j x_i (\delta_{i,j} + \delta_{j,i})$$

Comme

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq d} x_i^2 \delta_{j,j} + x_j^2 \delta_{i,i} &= \sum_{j=1}^d \delta_{j,j} \sum_{i=1}^{j-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^d \delta_{i,i} \sum_{j=i+1}^d x_j^2 = \sum_{i=1}^d \delta_{i,i} \sum_{j=1, j \neq i}^d x_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \delta_{i,i} (|x|^2 - x_i^2) \end{aligned}$$

et $\sum_{i=1}^d \delta_{i,i} = id$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \otimes u_{i,j}(x) &= |x|^2 id - \sum_{i=1}^d \delta_{i,i} x_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq d} x_j x_i (\delta_{i,j} + \delta_{j,i}) \\ &= |x|^2 id - x \otimes x. \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'identité (45). Prouvons maintenant que pour x dans \mathbb{S}^{d-1} , la famille de vecteurs $(u_{i,j}(x))_{1 \leq i < j \leq d}$ engendre l'espace tangent $T_x \mathbb{S}^{d-1}$. Rappelons pour cela que pour v_1, v_2, v_3 dans \mathbb{R}^d ,

$$v_1 \otimes v_2 v_3 = v_1 \langle v_2, v_3 \rangle.$$

Prenons v dans $T_x \mathbb{S}^{d-1}$. Appliquant la relation (45) à v ,

$$\begin{aligned} v &= x \otimes xv + \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \otimes u_{i,j}(x) v \\ &= x \langle x, v \rangle + \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \langle u_{i,j}(x), v \rangle \end{aligned}$$

et finalement,

$$v = \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \langle u_{i,j}(x), v \rangle.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

14 Entropie

Nous reprenons maintenant la discussion commencée dans l'introduction sur le fait que la définition II.1 et la proposition II.2 sont équivalentes. Pour cela, et pour rendre les choses plus claires, nous allons reprendre la définition II.1 issue de [22] et la proposition II.2, issue de [14] et qui sont formulées en dimension 2 pour des champs de divergence nulle et les reformuler en terme de champ de rotationnel nul, puisque c'est ce qui nous intéresse en dimension supérieure. Nous avons donc deux manières équivalentes de caractériser une entropie en dimension 2 :

Définition II.17. On dit que $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ est une entropie si et seulement si pour tout x dans \mathbb{S}^1 ,

$$\langle \partial_\theta \Phi(x), x^\perp \rangle = 0 \quad (46)$$

où $x^\perp := Rx$, R étant la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{2}$.

où bien

Proposition II.18. $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ est une entropie si et seulement si pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et tout champ m dans $C_{rot}^\infty(\Omega, \mathbb{S}^1) := \{m \in C^\infty(\Omega, \mathbb{S}^1) : \text{rot } m = 0\}$,

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] = 0. \quad (47)$$

Il n'est pas évident à priori que la définition II.17 et la proposition II.18 soient équivalentes. Le fait que la proposition II.18 implique la définition II.17 est montré dans [19] et résulte de l'utilisation de la relation (47) pour des champs m bien choisis. Celui que la proposition II.17 implique la définition II.18 est une conséquence d'arguments développés dans [14]. Nous y reviendrons au début de la partie suivante.

C'est de la définition II.17 que nous sommes partis pour généraliser la définition d'entropie en dimension supérieure. Pour cela, rappelons qu'on peut interpréter l'opérateur ∂_θ comme l'opérateur $D_{1,2}$ vu dans la section précédente. Comme on a vu dans la proposition II.15 que l'on peut faire agir ces opérateurs par dualité sur des fonctions dans $L^1(\mathbb{S}^{d-1})$, la définition d'entropie II.5 donnée précédemment est une façon faible de demander pour tout i, j avec $1 \leq i < j \leq d$,

$$\langle D\Phi u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = 0 \quad (48)$$

Avant de poursuivre et pour montrer que la définition n'est pas creuse, donnons deux exemples.

14.1 Un exemple d'entropie en dimension 2

Fixons $\xi \in \mathbb{S}^1$, v tel que $\langle \xi, v \rangle = 0$ et posons :

$$\Phi(x) := v\chi(x, \xi) = \begin{cases} v & \text{si } x \cdot \xi > 0, \\ 0 & \text{si } x \cdot \xi \leq 0. \end{cases}$$

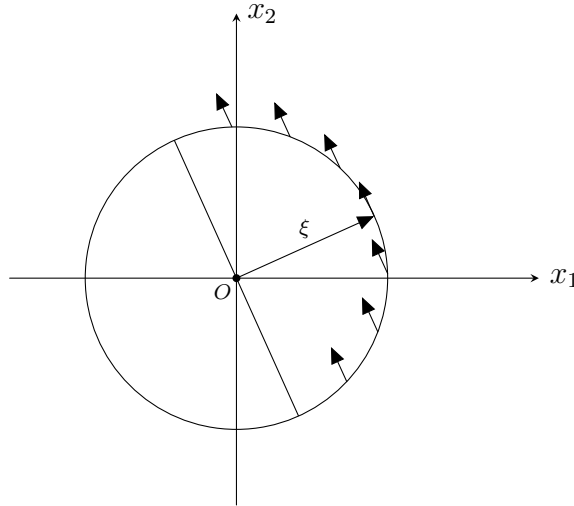


FIGURE 6 – Un exemple d'entropie en dimension 2

Alors, Φ est une entropie. En effet, soit $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $\xi = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$. Il existe λ dans \mathbb{R} tel que $v = \lambda(-\sin \theta_0, \cos \theta_0)$ et pour $\zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_1(x) D_{1,2}[x_2 \zeta](x) - \Phi_2(x) D_{1,2}[x_1 \zeta](x) d\sigma \\ = \lambda \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} -\sin \theta_0 \partial_\theta [\sin \theta \zeta] - \cos \theta_0 \partial_\theta [\cos \theta \zeta] d\theta \\ = \lambda \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \theta_0) \zeta(\theta) - \cos(\theta - \theta_0) \zeta'(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Intégrant par partie la seconde intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \cos(\theta - \theta_0) \zeta'(\theta) d\theta &= [\cos(\theta - \theta_0) \zeta(\theta)]_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} + \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \theta_0) \zeta(\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_0 + \frac{\pi}{2}} \sin(\theta - \theta_0) \zeta(\theta) d\theta \end{aligned}$$

donc finalement

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_1(x) D_{1,2}[x_2 \zeta](x) - \Phi_2(x) D_{1,2}[x_1 \zeta](x) d\sigma = 0.$$

Il est déjà intéressant de remarquer qu'à une rotation près, qui tient au fait qu'on s'intéresse aux fonctions de rotationnel nul et pas de divergence nulle, cette fonction est précisément l'entropie élémentaire définie dans [14] en tant que limite ponctuelle en tout point d'une suite d'entropies régulières.

14.2 Un exemple d'entropie en dimension quelconque

Soit $d > 2$. La fonction

$$\Phi(x) := e_2 \chi(x, e_1) = \begin{cases} e_2 & \text{si } x \cdot e_1 > 0, \\ 0 & \text{si } x \cdot e_1 \leq 0. \end{cases}$$

est une entropie. Parmi les $\binom{d}{2}$ relations à vérifier, un certain nombre sont évidentes. En effet, pour $1 \leq i \neq j \leq d$ et $i, j \neq 2$,

$$\Phi_i(x) = 0 = h_j(x),$$

et donc évidemment, pour tout $\zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(x) D_{i,j}[x_j \zeta](x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(x) D_{i,j}[x_i \zeta](x) d\sigma.$$

Il ne reste donc que $d - 1$ relations à vérifier, à savoir que pour $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{2\}$ et pour tout $\zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(x) D_{2,j}[x_j \zeta](x) d\sigma = 0. \quad (49)$$

Pour prouver cela, on va utiliser une paramétrisation particulière de \mathbb{S}^{d-1} dans laquelle $D_{2,j}$ s'exprime facilement. La paramétrisation classique de \mathbb{S}^{d-1} s'écrit :

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos \theta_1 \\ y_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ &\vdots \\ y_{d-1} &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\ y_d &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \end{aligned}$$

où $0 < \theta_i < \pi$ pour $i \in \{1, \dots, d-2\}$ et $0 < \theta_{d-1} < 2\pi$. Fixons $j \in \{1, \dots, d\} \setminus \{2\}$. On paramètre maintenant \mathbb{S}^{d-1} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta_1 \\ x_2 &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\ &\vdots \\ x_j &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \\ &\vdots \\ x_{d-1} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_d &= \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1} \cos \theta_j \end{aligned}$$

où $0 < \theta_i < \pi$ pour $i \in \{1, \dots, d-2\}$ et $0 < \theta_{d-1} < 2\pi$. C'est la paramétrisation classique dans laquelle on a simplement permuté y_2 et y_{d-1} et y_j et y_d sans toucher au reste. Montrons que dans ces coordonnées, pour $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$,

$$D_{2,j}f(x) = -\partial_{\theta_{d-1}}f(x).$$

Pour cela, on repart de l'expression (40) donnée dans les préliminaires :

$$\begin{aligned} T(Q_{2,j,\omega})f(x) &= f(Q_{i,j,-\omega}x) \\ &= f(x_1, x_2 \cos \omega + x_j \sin \omega, \dots, -x_2 \sin \omega + x_j \cos \omega, \dots, x_d) \\ &= f(x_1, \sin \theta \dots \sin \theta_{d-2} \cos(\theta_{d-1} - \omega), \dots, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin(\theta_{d-1} - \omega), \dots, x_d) \\ &= f(\theta_1, \varphi, \dots, \theta_{d-1} - \omega). \end{aligned}$$

et

$$D_{2,j}f(x) = \frac{d(T(Q_{2,j,\omega})f)}{d\omega}|_{\omega=0}(x) = \frac{d}{d\omega}f(\theta_1, \varphi, \dots, \theta_{d-1} - \omega)|_{\omega=0} = -\partial_{\theta_{d-1}}f(x).$$

La mesure uniforme sur \mathbb{S}^{d-1} s'écrit dans cette paramétrisation :

$$d\sigma = \sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-1}.$$

et finalement,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_2(x) D_{2,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1} \cap \{x_1 > 0\}} D_{2,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{[0,\pi]^{d-3}} \int_0^{2\pi} -\partial_{\theta_{d-1}} [\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \zeta(\theta)] d\sigma \\
&= - \underbrace{[\sin \theta_{d-1} \zeta(\theta)]_0^{2\pi}}_{=0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{[0,\pi]^{d-3}} \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} d\sigma'.
\end{aligned}$$

où $d\sigma' := \sin^{d-2} \theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{d-2}$. Φ est donc une entropie.

La proposition suivante nous permet de fabriquer de nouveaux exemples facilement.

Proposition II.19. *On désigne par \mathfrak{S}_d le groupe des permutations de $\{1, \dots, d\}$. Pour x dans \mathbb{R}^d et σ dans \mathfrak{S}_d , notons $\sigma \cdot x := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(d)})$. Alors,*

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S}_d \times \mathbf{ENT} & \longrightarrow & \mathbf{ENT} \\
(\sigma, h) & \longmapsto & \sigma * \Phi := x \mapsto \sigma \cdot \Phi(\sigma^{-1} \cdot x)
\end{array}$$

est une action de groupe.

Démonstration. Il est clair que $id * \Phi = \Phi$. Pour σ_1, σ_2 dans \mathfrak{S}_d et x dans \mathbb{R}^d ,

$$\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot x) = \sigma_1 \cdot (x_{\sigma_2(1)}, x_{\sigma_2(2)}, \dots, x_{\sigma_2(d)}) = (x_{\sigma_1 \sigma_2(1)}, x_{\sigma_1 \sigma_2(2)}, \dots, x_{\sigma_1 \sigma_2(d)}) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \cdot x$$

par conséquent,

$$\sigma_1 * (\sigma_2 * \Phi) = \sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot \Phi(\sigma_2^{-1} \cdot \sigma_1^{-1} \cdot x)) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \cdot \Phi((\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1} \cdot x) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) * \Phi.$$

Le seul point délicat consiste donc à montrer que si Φ est dans \mathbf{ENT} , $\sigma * \Phi$ est également dans \mathbf{ENT} . Comme les permutations de deux éléments engendrent \mathfrak{S}_d , il suffit de montrer ce qui précède pour les permutations de deux éléments de \mathfrak{S}_d . Fixons donc p et q deux entiers distincts de $\{1, \dots, d\}$, notons $\tau := (p \ q)$. Soit Φ un élément de \mathbf{ENT} montrons que $\tau * \Phi$ est encore dans \mathbf{ENT} .

Pour $1 \leq i < j \leq d$, trois cas distincts sont possibles :

$$\text{cas 1 : } \{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$$

Dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(\tau \cdot x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma.$$

Changeant de variable dans l'intégrale en posant $u := \tau \cdot x$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(u) D_{i,j} [x_j \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma.$$

Comme $\{i, j\} \cap \{p, q\} = \emptyset$, si f est une fonction régulière, en posant $u \xrightarrow{g} f(\tau \cdot u)$, il est facile de voir que

$$D_{i,j} [f] (\tau \cdot u) = D_{i,j} [g] (u) \tag{50}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(u) D_{i,j} [x_j \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(u) D_{i,j} [u_j \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(u) D_{i,j} [u_i \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) d\sigma, \end{aligned}$$

la deuxième égalité résultant du fait que Φ est une entropie. Réutilisant la relation (50) et le même changement de variable pour cette dernière intégrale,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(u) D_{i,j} [u_i \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_j(x) D_{i,j} [x_i \zeta] (x) d\sigma$$

et on obtient finalement,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_j(x) D_{i,j} [x_i \zeta] (x) d\sigma.$$

cas 2 : $\text{card}(\{i, j\} \cap \{p, q\}) = 1$. Supposons par exemple que $i = p$ et $j \neq q$.

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(\tau \cdot x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma.$$

Posant à nouveau $u := \tau \cdot x$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(\tau \cdot x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(u) D_{i,j} [x_j \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma$$

Cette fois, si f est une fonction régulière et $u \xrightarrow{g} f(\tau \cdot u)$,

$$D_{i,j}[f](\tau \cdot u) = D_{q,j}[g](u). \quad (51)$$

En effet,

$$\begin{aligned} D_{i,j}[f](\tau \cdot u) &= (x_i \partial_j f - x_j \partial_i f)(\tau \cdot u) \\ &= u_q \partial_j f(\tau \cdot u) - u_j \partial_i f(\tau \cdot u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D_{q,j}[g](u) &= u_q \partial_j [f(\tau \cdot u)] - u_j \partial_q [f(\tau \cdot u)] \\ &= u_q \partial_j f(\tau \cdot u) - u_j \partial_i f(\tau \cdot u), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(u) D_{i,j} [x_j \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(u) D_{q,j} [u_j \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(u) D_{q,j} [u_q \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) d\sigma. \end{aligned}$$

La deuxième égalité résultant du fait que Φ est une entropie. Réutilisant la relation (51), $D_{q,j} [u_q \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) = D_{i,j} [u_i \zeta] (\tau \cdot u)$. Le même changement de variable que précédemment donne alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(u) D_{q,j} [u_q \zeta(\tau \cdot \cdot)] (u) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(\tau \cdot u) D_{i,j} [u_i \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(\tau \cdot u) D_{i,j} [u_i \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma. \end{aligned}$$

Or j n'est pas dans le support de la permutation τ donc $\Phi_j(\tau \cdot u) = (\tau * \Phi)_j(u)$ et on a donc prouvé que :

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_j(x) D_{i,j} [x_i \zeta] (x) d\sigma.$$

Pour être tout à fait exhaustif, il nous faudrait traiter les trois autres cas possibles où $\text{card}(\{i, j\} \cap \{p, q\}) = 1$. Le cas où $i = q$ et $j \neq p$ est analogue en remarquant qu'avec les notations précédentes, on a

$$D_{i,j}[f](\tau \cdot u) = D_{p,j}[g](u)$$

Les deux cas restant se déduisent des deux premiers en utilisant le fait que $D_{i,j} = -D_{j,i}$.

cas 3 : $\{i, j\} = \{p, q\}$. Supposons par exemple que $(i, j) = (p, q)$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(\tau \cdot x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(u) D_{i,j} [x_j \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma. \end{aligned}$$

Si f est une fonction régulière et $u \xrightarrow{g} f(\tau \cdot u)$,

$$D_{i,j}[f](\tau \cdot u) = D_{q,p}[g](u). \quad (52)$$

En effet,

$$\begin{aligned} D_{i,j}[f](\tau \cdot u) &= (x_i \partial_j f - x_j \partial_i f)(\tau \cdot u) \\ &= u_q \partial_j f(\tau \cdot u) - u_p \partial_i f(\tau \cdot u) \\ \text{et} \\ D_{q,p}[g](u) &= u_q \partial_p [f(\tau \cdot u)] - u_p \partial_q [f(\tau \cdot u)] \\ &= u_q \partial_j f(\tau \cdot u) - u_j \partial_i f(\tau \cdot u), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(u) D_{i,j} [x_j \zeta] (\tau \cdot u) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_q(u) D_{q,p} [x_p \zeta(\tau \cdot .)] (u) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_p(u) D_{q,p} [x_q \zeta(\tau \cdot .)] (u) d\sigma, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que Φ est une entropie pour obtenir la dernière égalité. Réutilisant la relation (52), $D_{q,p} [x_q \zeta(\tau \cdot .)] (u) = D_{i,j} [u_p \zeta](\tau \cdot u)$ et changeant de variable dans l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_p(u) D_{q,p} [x_q \zeta(\tau \cdot .)] (u) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_p(u) D_{i,j} [u_p \zeta](\tau \cdot u) d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_p(\tau \cdot u) D_{i,j} [u_p \zeta](u) d\sigma. \end{aligned}$$

Or comme $(i, j) = (p, q)$, $\Phi_p(\tau \cdot u) = \Phi_i(\tau \cdot u) = (\tau * \Phi)_j(u)$ et on a donc montré que

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j} [x_j \zeta] (x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_j(u) D_{i,j} [x_i \zeta](x) d\sigma.$$

Le cas où $(i, j) = (q, p)$ est analogue.

On a donc montré que pour $1 \leq i < j \leq d$ et ζ dans $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_i(x) D_{i,j}[x_j \zeta](x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} (\tau * \Phi)_j(u) D_{i,j}[x_i \zeta](x) d\sigma.$$

Si Φ est une entropie, $\tau * \Phi$ est donc également une entropie. Ceci clôt la démonstration. \square

Remarque II.20. La proposition précédente combinée à l'exemple donné en dimension $d > 2$ montre donc que pour $i \neq j$, la fonction

$$\Phi(x) = e_i \mathbb{1}_{\{x_j > 0\}}$$

est une entropie. En dimension plus grande que 2, nous ne savons pas si pour ξ dans \mathbb{S}^{d-1} et v dans \mathbb{R}^d tel que $\langle \xi, v \rangle = 0$, la fonction

$$\Phi(x) := v\chi(x, \xi) = \begin{cases} v & \text{si } x \cdot \xi > 0, \\ 0 & \text{si } x \cdot \xi \leq 0. \end{cases}$$

est une entropie ou non en général.

Cette question est liée à la conjecture suivante :

Conjecture II.21. $O_d(\mathbb{R})$ désignant le groupe orthogonal, considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: O_d(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^1(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d) \\ (R, f) &\longmapsto \mathcal{A}(R, f)(x) := x \mapsto Rf(R^T x) \end{aligned}$$

La proposition II.19 peut s'interpréter en disant que le sous-groupe de $O_d(\mathbb{R})$ engendré par les symétries par rapport aux plans d'équation $x_i = x_j$ pour i, j dans $\{1, \dots, d\}$ agit sur **ENT** par l'action de groupe donnée par \mathcal{A} .

Une question naturelle est la suivante : le groupe orthogonal entier agit-il sur l'ensemble des entropies ? Si $d = 2$, cette conjecture est vraie et nous la prouvons ci-dessous. En dimension plus grande, nous pensons cette conjecture fausse.

Proposition II.22. en dimension 2, $O_2(\mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des entropies par l'action \mathcal{A} précédente.

Démonstration. Il y a une seule chose non évidente à prouver pour montrer que \mathcal{A} est une action de groupe : le fait que pour Φ dans **ENT** et R dans $O_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}(R, \Phi)$ est encore dans **ENT**.

Notons S la symétrie d'axe $x_1 = x_2$ et R_ω la rotation d'angle ω . Comme le groupe $O_2(\mathbb{R})$ est engendré par $\{S, R_\omega \mid \omega \in [0, 2\pi[\}$, il suffit de montrer que pour Φ entropie, $\mathcal{A}(S, \Phi)$ et $\mathcal{A}(R_\omega, \Phi)$ sont encore des entropies. Pour $\mathcal{A}(S, \Phi)$, c'est clair : c'est la pro-

position II.19. Pour une rotation R_ω ,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^1} \mathcal{A}(R_\omega, \Phi)_1(x) D_{1,2}[x_2 \zeta](x) d\sigma &= \int_{\mathbb{S}^1} (\cos \omega \Phi_1(R_{-\omega}x) - \sin \omega \Phi_2(R_{-\omega}x)) D_{1,2}[x_2 \zeta](x) d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos \omega \Phi_1(\theta - \omega) - \sin \omega \Phi_2(\theta - \omega)) \partial_\theta [\sin \theta \zeta](\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos \omega \Phi_1(\theta) - \sin \omega \Phi_2(\theta)) \partial_\theta [\sin(\theta + \omega) \zeta(\theta + \omega)] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos \omega \Phi_1(\theta) - \sin \omega \Phi_2(\theta)) (\sin \omega \partial_\theta [\cos \theta \zeta(\theta + \omega)] + \\
&\quad \cos \omega \partial_\theta [\sin \theta \zeta(\theta + \omega)]) d\theta
\end{aligned} \tag{53}$$

Comme Φ est une entropie,

$$\int_0^{2\pi} \Phi_2(\theta) \partial_\theta [\cos \theta \zeta(\theta + \omega)] d\theta = \int_0^{2\pi} \Phi_1(\theta) \partial_\theta [\sin \theta \zeta(\theta + \omega)] d\theta \tag{54}$$

Reprenant (53),

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^{2\pi} (\cos \omega \Phi_1(\theta) - \sin \omega \Phi_2(\theta)) (\sin \omega \partial_\theta [\cos \theta \zeta(\theta + \omega)] + \cos \omega \partial_\theta [\sin \theta \zeta(\theta + \omega)]) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \partial_\theta [\cos \theta \zeta(\theta + \omega)] (\sin \omega \cos \omega \Phi_1(\theta) + \cos^2 \omega \Phi_2(\theta)) + \\
&\quad \partial_\theta [\sin \theta \zeta(\theta + \omega)] (-\sin^2 \omega \Phi_1(\theta) - \sin \omega \cos \omega \Phi_2(\theta)) d\theta \quad \text{par (54)} \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin \omega \Phi_1(\theta) + \cos \omega \Phi_2(\theta)) \partial_\theta [\underbrace{(\cos \theta \cos \omega - \sin \theta \sin \omega)}_{\cos(\theta + \omega)} \zeta(\theta + \omega)] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin \omega \Phi_1(\theta - \omega) + \cos \omega \Phi_2(\theta - \omega)) \partial_\theta [\cos(\theta) \zeta(\theta)] d\theta \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} \mathcal{A}(R_\omega, \Phi)_2(x) D_{1,2}[x_1 \zeta](x) d\sigma(x)
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\mathcal{A}(R_\omega, \Phi)$ est une entropie et la proposition. \square

Le lemme suivant montre que si Φ est une entropie régulière, on a la relation (32) au sens fort.

Lemme II.23. $\Phi \in \mathbf{ENT} \cap C^1(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq d$,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1} \quad x_j D_{i,j} \Phi_i(x) = x_i D_{i,j} \Phi_j(x). \tag{55}$$

Démonstration. Comme Φ est une entropie, pour $1 \leq i < j \leq d$,

$$\forall \zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}) \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_i(x) D_{i,j}[x_j \zeta(x)] d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Phi_j(x) D_{i,j}[x_i \zeta(x)] d\sigma.$$

Comme $\Phi \in C^1(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$, par la proposition II.15, cela implique

$$\forall \zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}) \quad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} D_{i,j} \Phi_i(x) x_j \zeta(x) d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} D_{i,j} \Phi_j(x) x_i \zeta(x) d\sigma. \tag{56}$$

On conclut par l'absurde : supposons qu'il existe i_0, j_0 et x' dans \mathbb{S}^{d-1} tels que

$$x_{j_0} D_{i_0, j_0} \Phi_{i_0}(x') \neq x_{i_0} D_{i_0, j_0} \Phi_{j_0}(x').$$

Par continuité, il existe un voisinage V de x' dans \mathbb{S}^{d-1} tel que pour x dans V ,

$$x_{j_0} D_{i_0, j_0} \Phi_{i_0}(x) - x_{i_0} D_{i_0, j_0} \Phi_{j_0}(x) > 0 \quad \text{par exemple.}$$

Notons U un ouvert \mathbb{S}^{d-1} strictement inclu dans V . Il suffit de prendre $\zeta \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ telle que $\zeta(x) = 1$ sur U et $\zeta(x) = 0$ sur V^c pour contredire (56), ce qui est absurde et le lemme est prouvé. \square

On peut formuler cette caractérisation de manière un peu plus géométrique grâce aux fonctions $u_{i,j}$ définies dans la première partie : c'est le corollaire suivant.

Corollaire II.24. $\Phi \in \mathbf{ENT} \cap C^1(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour tout $1 \leq i < j \leq d$,

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1} \quad \langle D_x \Phi u_{i,j}(x), u_{i,j}(x) \rangle = 0. \quad (57)$$

où $D\Phi$ désigne ici la différentielle de Φ en tant qu'application de \mathbb{S}^{d-1} dans \mathbb{R}^d .

Démonstration. Comme d'habitude, on étend Φ en une fonction définie sur un voisinage de la sphère. Un calcul montre alors que

$$\langle D_x \Phi u_{i,j}(x), u_{i,j}(x) \rangle = x_j D_{i,j} \Phi_i(x) - x_i D_{i,j} \Phi_j(x),$$

ce qui conclut. \square

Ce corollaire permet d'exhiber les premiers exemples d'entropies régulières. Fixons w dans \mathbb{R}^d , l'application $\Phi(x) = w$ est une entropie régulière. $A_d(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices antisymétriques de \mathbb{R}^d , si $A \in A_d(\mathbb{R})$ et si $\Phi(x) = Ax$, Φ est une entropie régulière. Prouvons seulement cette seconde affirmation, la première étant évidente. Pour $\Phi(x) = Ax$, $\langle D\Phi u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = \langle Au_{i,j}, u_{i,j} \rangle = -\langle u_{i,j}, Au_{i,j} \rangle = 0$.

Définition II.25. On appellera par la suite entropies triviales les entropies constantes ou de la forme Ax pour A dans l'ensemble des endomorphismes antisymétriques $A_d(\mathbb{R})$.

Remarque II.26. Remarquons qu'en dimension 2, notre notion d'entropie pour une fonction régulière coïncide bien avec la notion d'entropie donnée par la définition II.17. En effet, d'après le corollaire II.24, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ est une entropie fondamentale régulière si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1 \quad \langle D_x \Phi u_{1,2}(x), u_{1,2}(x) \rangle = 0.$$

Or $D_x \Phi u_{1,2}(x) = D_{1,2} \Phi(x)$ et comme $D_{1,2} = \partial_\theta$ et $u_{1,2}(x) = x^\perp$ cette relation est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1 \quad \langle \partial_\theta \Phi(x), x^\perp \rangle = 0,$$

ce qui est précisément la définition II.17.

On notera par la suite l'ensemble des entropies régulières :

$$\mathbf{ENT}_{reg} = \mathbf{ENT} \cap C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d).$$

15 Propriétés des entropies régulières

Le but principal de cette section est l'établissement des théorèmes II.6 et II.7. Avant de commencer, il est instructif de voir comment on prouve ces résultats en dimension 2 en partant de la définition II.17 d'entropie. Les arguments, que nous résumons ici, sont issus de [14]. Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1 \quad \langle \partial_\theta \Phi(x), x^\perp \rangle = 0.$$

On prolonge radialement Φ en une fonction $\tilde{\Phi}$ définie sur \mathbb{R}^2 . $\tilde{\Phi}$ vérifie alors sur \mathbb{R}^2

$$\langle D_x \tilde{\Phi} x^\perp, x^\perp \rangle = 0. \quad (58)$$

Pour une fonction vérifiant la relation (58), il existe ψ dans $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tel que pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et tout champ m dans $C_{rot}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$,

$$\nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \langle \psi(m), \nabla [|m|^2 - 1] \rangle, \quad (59)$$

ce qui conclut.

La première étape pour espérer adapter cette preuve en dimension supérieure est de pouvoir prolonger une entropie fondamentale régulière définie sur \mathbb{S}^{d-1} en une fonction définie sur \mathbb{R}^d tout entier et vérifiant certaines propriétés. C'est l'objet de la définition et du lemme suivant.

Définition II.27. Soit $\Phi \in \mathbf{ENT}$ et $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ nulle sur un voisinage de 0 et vérifiant $\rho(1) = 1$. On définit une entropie sur \mathbb{R}^d entier en posant :

$$\tilde{\Phi}(x) = \rho(|x|)\Phi\left(\frac{x}{|x|}\right) \quad (60)$$

et on appelle $\tilde{\Phi}$ une entropie globale.

En accord avec les notations précédentes, on notera \mathbf{ENT} les entropies globales et \mathbf{ENT}_{reg} les entropies globales issues d'une entropie régulière. Par la suite, $\tilde{\Phi}$ désignera une entropie globale définie sur \mathbb{R}^d provenant d'une entropie Φ définie sur \mathbb{S}^{d-1} par la relation (60).

Lemme II.28. Soit $\tilde{\Phi} \in \mathbf{ENT}_{reg}$. Alors, pour $1 \leq i < j \leq d$,

$$\langle D\tilde{\Phi} u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = 0.$$

Démonstration. Pour $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$

$$D_{i,j} \left[f\left(\frac{x}{|x|}\right) \right] = \frac{1}{|x|} D_{i,j}(f) \left(\frac{x}{|x|} \right). \quad (61)$$

En effet,

$$\begin{aligned}
D_{i,j} \left[f \left(\frac{x}{|x|} \right) \right] &= x_i \partial_j \left[f \left(\frac{x}{|x|} \right) \right] - x_j \partial_i \left[f \left(\frac{x}{|x|} \right) \right] \\
&= x_i \left(\sum_{k \neq j} \frac{-x_j x_k}{|x|^3} \partial_k f + \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3} \partial_j f \right) - \\
&\quad x_j \left(\sum_{k \neq i} \frac{-x_i x_k}{|x|^3} \partial_k f + \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} \partial_i f \right) \\
&= x_i \left(\frac{-x_j}{|x|^3} x \cdot \nabla f + \frac{1}{|x|} \partial_j f \right) - x_j \left(\frac{-x_i}{|x|^3} x \cdot \nabla f + \frac{1}{|x|} \partial_i f \right) \\
&= \frac{1}{|x|} D_{i,j}(f) \left(\frac{x}{|x|} \right).
\end{aligned}$$

Combinant (41) et (61),

$$\begin{aligned}
x_j D_{i,j} \tilde{\Phi}_i(x) &= x_j D_{i,j} \left[\rho(|x|) \Phi \left(\frac{x}{|x|} \right) \right] \\
&= \rho(|x|) \frac{x_j}{|x|} D_{i,j} \Phi_i \left(\frac{x}{|x|} \right) + \Phi_i \left(\frac{x}{|x|} \right) D_{i,j} [\rho(|x|)].
\end{aligned} \tag{62}$$

Comme Φ est une entropie régulière, par le lemme II.23, pour tout x dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\frac{x_j}{|x|} D_{i,j} \Phi_i \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{x_i}{|x|} D_{i,j} \Phi_j \left(\frac{x}{|x|} \right),$$

et comme $\rho(|x|)$ ne dépend que de la norme de x ,

$$D_{i,j} [\rho(|x|)] = \frac{\partial}{\partial \theta_{i,j}} [\rho(|x|)] = 0.$$

Reportant dans (62),

$$x_j D_{i,j} \tilde{\Phi}_i(x) = \rho(|x|) \frac{x_i}{|x|} D_{i,j} \Phi_j \left(\frac{x}{|x|} \right) = x_i D_{i,j} \tilde{\Phi}_j(x),$$

ce qui prouve le lemme. □

Nous aurions maintenant besoin de l'analogue de la relation (59). C'est précisément le théorème II.6 que nous allons prouver maintenant.

15.1 Démonstration du théorème II.6

Démonstration. Nous voulons donc montrer que si $\tilde{\Phi}$ est dans \mathbf{ENT}_{reg} , il existe une fonction ψ dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout ouvert Ω de \mathbb{R}^d et tout champ m dans $C_{rot}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$,

$$\nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \langle \psi(m), \nabla[|m|^2 - 1] \rangle.$$

D'une part

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] &= \text{Tr} [D\tilde{\Phi}(m)Dm] \\
&= \text{Tr} \begin{pmatrix} \partial_1 \tilde{\Phi}_1(m) & \dots & \partial_d \tilde{\Phi}_1(m) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \tilde{\Phi}_d(m) & \dots & \partial_d \tilde{\Phi}_d(m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 m_1 & \dots & \partial_d m_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 m_d & \dots & \partial_d m_d \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^d \langle \nabla \tilde{\Phi}_i(m), \partial_i m \rangle. \tag{63}
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^d m_k \langle \nabla \tilde{\Phi}_i(m), \partial_i m \rangle &= \prod_{k=1}^d m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \partial_i m_i + \prod_{k=1}^d m_k \sum_{p \neq i} \partial_p \tilde{\Phi}_i(m) \partial_i m_p \\
&= \prod_{k \neq i} m_k (\partial_i \tilde{\Phi}_i(m) m_i \partial_i m_i) + \prod_{k=1}^d m_k \sum_{p \neq i} \partial_p \tilde{\Phi}_i(m) \partial_i m_p \\
&= \prod_{k \neq i} m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \frac{\partial_i |m|^2}{2} - \prod_{k \neq i} m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \sum_{p \neq i} m_p \partial_i m_p \\
&\quad + \prod_{k=1}^d m_k \sum_{p \neq i} \partial_p \tilde{\Phi}_i(m) \partial_i m_p \\
&= \prod_{k \neq i} m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \frac{\partial_i |m|^2}{2} \\
&\quad + \sum_{p \neq i} \partial_i m_p \prod_{k \neq i} m_k [m_i \partial_p \tilde{\Phi}_i(m) - m_p \partial_i \tilde{\Phi}_i(m)] \\
\prod_{k=1}^d m_k \langle \nabla \tilde{\Phi}_i(m), \partial_i m \rangle &= \prod_{k \neq i} m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \frac{\partial_i |m|^2}{2} + \sum_{p \neq i} \partial_i m_p \prod_{k \neq i} m_k (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m). \tag{64}
\end{aligned}$$

Multipliant (63) par $\prod_{k=1}^d m_k$ et combinant avec (64), on obtient :

$$\prod_{k=1}^d m_k \nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \sum_{i=1}^d \prod_{k \neq i} m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \frac{\partial_i |m|^2}{2} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \sum_{p \neq i} \partial_i m_p \prod_{k \neq i} m_k (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m)}_S. \tag{65}$$

Le calcul suivant est le noeud de la proposition : on va montrer que le fait que $\tilde{\Phi}$ soit une entropie et que m soit de rotationnel nul implique $S = 0$.

$$S = \underbrace{\sum_{i=1}^d \sum_{p < i} \partial_i m_p \prod_{k \neq i} m_k (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^d \sum_{p > i} \partial_i m_p \prod_{k \neq i} m_k (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m)}_{S_2}$$

D'une part,

$$S_1 = \sum_{i=1}^d \sum_{p < i} \partial_i m_p m_p (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m) \prod_{k \neq i,p}^d m_k. \quad (66)$$

Changeant l'ordre de sommation pour S_2

$$S_2 = \sum_{p=1}^d \sum_{i < p} \partial_i m_p \prod_{k \neq i}^d m_k (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m).$$

m est de rotationnel nul donc $\partial_i m_p = \partial_p m_i$ et $D_{i,j} = -D_{j,i}$, donc

$$\begin{aligned} S_2 &= - \sum_{p=1}^d \sum_{i < p} \partial_p m_i \prod_{k \neq i}^d m_k (D_{p,i} \tilde{\Phi}_i)(m) \\ &= - \sum_{p=1}^d \sum_{i < p} \partial_p m_i m_p (D_{p,i} \tilde{\Phi}_i)(m) \prod_{k \neq i,p}^d m_k. \end{aligned} \quad (67)$$

Combinant (66) et (67), et renommant $i := p, p := i$ dans S_2 , on obtient :

$$S = \sum_{i=1}^d \sum_{p < i} \partial_i m_p \underbrace{\left[m_p (D_{i,p} \tilde{\Phi}_i)(m) - m_i (D_{i,p} \tilde{\Phi}_p)(m) \right]}_{=0 \text{ par le lemme II.28}} \prod_{k \neq i,p}^d m_k = 0.$$

Et par conséquent, reprenant (65), on obtient :

$$\prod_{k=1}^d m_k \nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \sum_{i=1}^d \prod_{k \neq i}^d m_k \partial_i \tilde{\Phi}_i(m) \frac{\partial_i |m|^2}{2}.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par $\prod_{k=1}^d m_k$, on a donc :

$$\nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \sum_{i=1}^d \frac{\partial_i \tilde{\Phi}_i(m)}{2m_i} \partial_i |m|^2,$$

ce qui donne l'égalité souhaitée en posant :

$$\psi_i(x) = \frac{\partial_i \tilde{\Phi}_i(x)}{2x_i}.$$

Pour conclure, il reste à montrer que ψ est une fonction régulière. Nous allons montrer que la composante ψ_1 est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, les autres composantes se traitant de manière analogue. On a donc :

$$\psi_1(x) = \frac{\partial_1 \tilde{\Phi}_1(x)}{2x_1}.$$

C'est un élément de $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{x_1 = 0\})$. Mais comme $\tilde{\Phi}$ est une entropie, $\langle D\tilde{\Phi} u_{1,2}, u_{1,2} \rangle = 0$, c'est-à-dire :

$$x_2(x_1 \partial_2 \tilde{\Phi}_1 - x_2 \partial_1 \tilde{\Phi}_1) = x_1(x_1 \partial_2 \tilde{\Phi}_2 - x_2 \partial_1 \tilde{\Phi}_2).$$

Divisant par $x_1 x_2^2$ et permutant deux termes,

$$\frac{\partial_1 \tilde{\Phi}_1}{x_1} = -\frac{\partial_2 \tilde{\Phi}_1}{x_2} - x_1 \frac{\partial_2 \tilde{\Phi}_2}{x_2^2} + \frac{\partial_1 \tilde{\Phi}_2}{x_2}.$$

Le membre de droite de cette égalité est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{x_2 = 0\})$; on a donc prouvé que $x \mapsto \frac{\partial_1 \tilde{\Phi}_1}{x_1}$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^{*d})$ mais comme on a choisi la fonction ρ associée à $\tilde{\Phi}$ nulle sur un voisinage de 0, on a de plus $D_0 \tilde{\Phi} = 0$ et donc $x \mapsto \frac{\partial_1 \tilde{\Phi}_1(x)}{x_1}$ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ce qui prouve le théorème. \square

La démonstration du théorème II.7 est maintenant immédiate.

15.2 Démonstration du théorème II.7

Démonstration. D'après le théorème II.6, pour tout x dans Ω ,

$$\nabla \cdot [\tilde{\Phi} \circ m] = \langle \psi(m), \nabla [|m|^2 - 1] \rangle$$

où $\tilde{\Phi}$ désigne l'extension de Φ sur \mathbb{R}^d donnée par le lemme II.28. Comme m est à valeur dans \mathbb{S}^{d-1} , le membre de droite est nul et comme pour x dans \mathbb{S}^{d-1} , $\tilde{\Phi}(x) = \Phi(x)$, on en déduit que pour x dans Ω ,

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m](x) = 0$$

et le théorème est prouvé. \square

Nous concluons cette section par la preuve d'une proposition dont nous ne ferons pas usage par la suite mais néanmoins intéressante.

Proposition II.29. *Soit Φ une entropie régulière de \mathbb{S}^{d-1} dans \mathbb{R}^d . Soit p dans $\{1, \dots, d\}$ et $\bar{x}_p := (x_1, \dots, x_{p-1}, 0, x_{p+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. L'application*

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_p: \quad & \{x \in \mathbb{S}^{d-1} : x_p = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{d-1} \\ & \mathbb{S}^{d-2} \ni (x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_d) \longmapsto (\Phi_1(\bar{x}_p), \dots, \Phi_p(\bar{x}_p), \Phi_{p+1}(\bar{x}_p), \dots, \Phi_d(\bar{x}_p)) \end{aligned}$$

est une entropie régulière de \mathbb{S}^{d-2} dans \mathbb{R}^{d-1} .

Démonstration. Nous allons le montrer dans le cas où $p = 1$ pour simplifier. Il suffit de montrer que pour $2 \leq i < j \leq d$ et pour tout x dans \mathbb{S}^{d-2} ,

$$x_i D_{i,j} \bar{\Phi}_{1,j}(x) = x_j D_{i,j} \bar{\Phi}_{1,i}(x).$$

Or comme Φ est une entropie régulière, pour tout $1 \leq i < j \leq d$ et pour tout x dans \mathbb{S}^{d-1}

$$x_i D_{i,j} \Phi_j(x) = x_j D_{i,j} \Phi_i(x).$$

Restreignant ces relations à l'ensemble $\{x \in \mathbb{S}^{d-1} : x_1 = 0\}$, on obtient précisément les relations souhaitées pour $\bar{\Phi}_1$, ce qui termine la preuve. \square

16 Caractérisation des entropies régulières

Nous venons de prouver un certain nombre de propriétés des entropies régulières mais nous n'avons pour le moment pas donné d'autre exemple que les entropies triviales, à savoir :

$$\Phi(x) = w \text{ pour } w \in \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \Phi(x) = Ax \text{ avec } A \in A_d(\mathbb{R}).$$

Le but de cette section est donc de caractériser les entropies régulières afin d'exhiber d'autres exemples.

En dimension 2, les entropies régulières sont complètement caractérisées par le théorème suivant qu'on trouve dans [19].

Théorème II.30. (*Ignat, Merlet [22]*). Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Alors Φ est une entropie régulière si et seulement si il existe une fonction φ dans $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ telle que pour tout x dans \mathbb{S}^1 ,

$$\Phi = -\partial_\theta \varphi x + \varphi x^\perp$$

où $x^\perp = Rx$, R désignant la rotation directe d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Avant de poursuivre, faisons une petite remarque sur ce théorème. Le lecteur qui consulterait [19] n'y trouverait pas exactement la caractérisation précédente mais plutôt une caractérisation des entropies de la forme :

$$\Phi = \varphi x + \partial_\theta \varphi x^\perp.$$

Ceci tient au fait que [22] s'intéresse aux entropies pour des fonctions de divergence nulle. Le théorème II.30 ci-dessus est une simple reformulation du théorème de [22] quand on considère les entropies pour des champs de rotationnel nul au lieu de champs de divergence nulle.

Nous allons commencer par prouver le théorème II.10 caractérisant les entropies.

16.1 Démonstration du théorème II.10

Démonstration. Soit $\Phi \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{R}^d)$. Prouvons d'abord l'identité (35). Cela découle directement de la relation (45). En effet, appliquant cette relation à Φ ,

$$\Phi(x) = x \otimes x \Phi(x) + \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j}(x) \otimes u_{i,j}(x) \Phi(x).$$

Comme

$$v_1 \otimes v_2 v_3 = v_1 \langle v_2, v_3 \rangle,$$

il vient

$$\Phi(x) = \langle \Phi(x), x \rangle x + \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \Phi(x), u_{p,q}(x) \rangle u_{p,q}(x),$$

et utilisant cette fois (44), on obtient finalement :

$$\Phi(x) = \langle \Phi(x), x \rangle x + \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \Phi(x), u_{p,q}(x) \rangle (\delta_{q,p} - \delta_{p,q})x.$$

Ceci prouve l'identité (35) en posant $\alpha := \langle \Phi(x), x \rangle$ et $\beta := \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \Phi(x), u_{p,q}(x) \rangle (\delta_{q,p} - \delta_{p,q})$.

Maintenant, Φ est une entropie si et seulement si pour $1 \leq i < j \leq d$ et pour tout x dans \mathbb{S}^{d-1} ,

$$\langle D\Phi u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = \langle D_{i,j}\Phi, u_{i,j} \rangle = 0,$$

ce qui, en utilisant l'identité précédente sur Φ , équivaut à :

$$D_{i,j}\alpha \langle x, u_{i,j} \rangle + \alpha \langle D_{i,j}x, u_{i,j} \rangle + \sum_{1 \leq p < q \leq d} D_{i,j} [\langle \Phi, u_{p,q} \rangle] \langle u_{p,q}, u_{i,j} \rangle + \langle \Phi, u_{p,q} \rangle \langle (D_{i,j} [(\delta_{q,p} - \delta_{p,q})x], u_{i,j} \rangle = 0.$$

Or $D_{i,j}x = u_{i,j}$ et donc

$$\langle (D_{i,j} [(\delta_{q,p} - \delta_{p,q})x], u_{i,j} \rangle = \langle (\delta_{q,p} - \delta_{p,q})u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = 0$$

puisque $\delta_{q,p} - \delta_{p,q}$ est antisymétrique.

L'équation précédente est donc finalement équivalente à :

$$\alpha |u_{i,j}|^2 + \sum_{1 \leq p < q \leq d} D_{i,j} [\langle \Phi, u_{p,q} \rangle] \langle u_{p,q}, u_{i,j} \rangle = 0, \quad (68)$$

ce qui est exactement l'identité (36) puisque pour $1 \leq p < q \leq d$, $\beta_{p,q} = -\langle \Phi, u_{p,q} \rangle$.

Il nous reste à prouver l'identité (37). Pour cela, on va sommer les égalités (36) sur i, j .

Remarquons d'abord que :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq d} |u_{i,j}|^2 = d - 1.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq d} |u_{i,j}|^2 &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i=1}^d (d-i)x_i^2 + \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^{j-1} x_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^d (d-i)x_i^2 + \sum_{i=1}^d (i-1)x_i^2 = (d-1) \sum_{i=1}^d x_i^2 \\ &= d - 1. \end{aligned}$$

Sommant sur i, j , on obtient donc :

$$\begin{aligned} (d-1)\alpha &= \sum_{1 \leq i < j \leq d} \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle u_{p,q}, u_{i,j} \rangle D_{i,j} \beta_{p,q} \\ &= \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \nabla \beta_{p,q}, \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j} \langle u_{p,q}, u_{i,j} \rangle \rangle \\ &= \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \nabla \beta_{p,q}, \sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j} \otimes u_{i,j} u_{p,q} \rangle. \end{aligned}$$

Réutilisant l'identité (45) :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq d} u_{i,j} \otimes u_{i,j} u_{p,q} = u_{p,q} - x \langle x, u_{p,q} \rangle = u_{p,q}.$$

On obtient donc finalement :

$$(d-1)\alpha = \sum_{1 \leq p < q \leq d} \langle \nabla \beta_{p,q}, u_{p,q} \rangle = \sum_{1 \leq p < q \leq d} D_{p,q} \beta_{p,q},$$

ce qui prouve l'identité (37) et le théorème. \square

Avant de poursuivre, remarquons qu'en dimension 2, le théorème II.10 redonne bien la caractérisation des entropies régulières donnée par le théorème II.30. En effet, pour Φ dans $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, écrivons :

$$\Phi(x) = (\alpha(x)id + \beta(x))x$$

où

$$\alpha = \langle \Phi(x), x \rangle \quad \text{et} \quad \beta(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\langle \Phi(x), u_{1,2}(x) \rangle \\ \langle \Phi(x), u_{1,2}(x) \rangle & 0 \end{pmatrix}.$$

Φ est une entropie régulière si et seulement si α et β sont liés par l'équation

$$\alpha = D_{1,2}\beta_{1,2} = \partial_\theta \beta_{1,2}$$

et par conséquent,

$$\Phi = \partial_\theta \beta_{1,2}x + \begin{pmatrix} 0 & \beta_{1,2} \\ -\beta_{1,2} & 0 \end{pmatrix} x = \partial_\theta \beta_{1,2}x - \beta_{1,2}x^\perp.$$

Il est facile de voir que réciproquement, si il existe une fonction φ dans $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ telle que :

$$\Phi = -\partial_\theta \varphi x + \varphi x^\perp,$$

$\beta_{1,2} = -\varphi$ et α et β vérifient l'équation souhaitée.

Malheureusement, en dimension strictement plus grande que 2, le théorème II.10 est de peu d'aide pour la construction d'entropies. L'un des principaux problèmes est que pour $d > 2$, les $(u_{i,j})_{1 \leq i < j \leq d}$ ne forment plus une base de \mathbb{R}^d . Quand bien même nous trouverions α et β vérifiant le système d'équation aux dérivées partielles (36), on ne peut donc plus assurer qu'il existe une fonction régulière Φ sur la sphère telle que $\Phi = (\alpha id + \beta)x$.

16.2 Le cas de la dimension 3

Nous sommes donc partis d'une autre approche pour essayer de caractériser les entropies régulières dans le cas de la dimension 3 : repartir des équations (57) et les traduire en prenant des coordonnées sphériques sur \mathbb{S}^2 . C'est l'objet du théorème II.11 que nous démontrons maintenant :

16.2.1 Démonstration du théorème II.11

Démonstration. Nous allons prouver un peu plus que le théorème II.11 ; nous allons en fait montrer que sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$, pour $1 \leq i < j \leq 3$

$$\langle D\Phi u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = 0 \tag{69}$$

si et seulement si $(\alpha, \tilde{a}, \tilde{b})$ vérifient le système (38), à savoir :

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ \partial_\varphi \tilde{a} = -\sin \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ \partial_\varphi \tilde{b} = \sin \theta \partial_\theta \tilde{a} \end{cases}$$

où

$$\Phi = \alpha \mathbf{r} + a \boldsymbol{\theta} + b \boldsymbol{\varphi},$$

$$\tilde{a} := \frac{a}{\sin \theta} \text{ et } \tilde{b} := \frac{b}{\sin \theta} \text{ avec}$$

$$\mathbf{r} := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} := \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varphi} := \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prenons comme paramétrisation de la sphère le difféomorphisme

$$\begin{aligned} T :]0, \pi[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\} \\ (\theta, \varphi) &\mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \end{aligned}$$

Passant en coordonnées sphériques, il existe alors trois fonctions α, a et b dans $C^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\})$ telles que :

$$\Phi = \alpha \mathbf{r} + a \boldsymbol{\theta} + b \boldsymbol{\varphi}.$$

Il suffit de poser $\alpha := \langle \Phi, \mathbf{r} \rangle$, $a := \langle \Phi, \boldsymbol{\theta} \rangle$ et $b := \langle \Phi, \boldsymbol{\varphi} \rangle$. Avant de se lancer dans les calculs à proprement parler, rappelons les identités suivantes, dont on fera usage par la suite :

$$\begin{array}{lll} \partial_\theta \mathbf{r} = \boldsymbol{\theta} & \partial_\varphi \mathbf{r} = \sin \theta \boldsymbol{\varphi} & \partial_\theta \Phi = D\Phi \cdot \boldsymbol{\theta} \\ \partial_\theta \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{r} & \partial_\varphi \boldsymbol{\theta} = \cos \theta \boldsymbol{\varphi} & \partial_\varphi \Phi = \sin \theta D\Phi \cdot \boldsymbol{\varphi} \\ \partial_\theta \boldsymbol{\varphi} = 0 & \partial_\varphi \boldsymbol{\varphi} = -\sin \theta \mathbf{r} - \cos \theta \boldsymbol{\theta} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \partial_\theta \Phi &= \partial_\theta \alpha \mathbf{r} + \alpha \boldsymbol{\theta} + \partial_\theta a \boldsymbol{\theta} - a \mathbf{r} + \partial_\theta b \boldsymbol{\varphi} \\ &= (\partial_\theta \alpha - a) \mathbf{r} + (\alpha + \partial_\theta a) \boldsymbol{\theta} + \partial_\theta b \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Phi &= \partial_\varphi \alpha \mathbf{r} + \alpha \sin \theta \boldsymbol{\varphi} + \partial_\varphi a \boldsymbol{\theta} + a \cos \theta \boldsymbol{\varphi} + \partial_\varphi b \boldsymbol{\varphi} + b(-\sin \theta \mathbf{r} - \cos \theta \boldsymbol{\theta}) \\ &= (\partial_\varphi \alpha - b \sin \theta) \mathbf{r} + (\partial_\varphi a - b \cos \theta) \boldsymbol{\theta} + (\alpha \sin \theta + a \cos \theta + \partial_\varphi b) \boldsymbol{\varphi}. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant réécrire le système d'équations aux dérivées partielles (69) en terme de coordonnées sphériques. Pour cela, remarquons que :

$$u_{1,2} = x_1 \mathbf{e}_2 - x_2 \mathbf{e}_1 = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_2 - \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_1 = \sin \theta \boldsymbol{\varphi},$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \langle D\Phi u_{1,2}, u_{1,2} \rangle = 0 &\iff \sin \theta \langle \partial_\varphi \Phi, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0 \\ &\iff \sin \theta (\alpha \sin \theta + a \cos \theta + \partial_\varphi b) = 0. \end{aligned}$$

Comme $\sin \theta \neq 0$ pour θ dans $]0, \pi[$,

$$\langle D\Phi u_{1,2}, u_{1,2} \rangle = 0 \iff \alpha \sin \theta + a \cos \theta + \partial_\varphi b = 0.$$

De même,

$$u_{1,3} = x_1 \mathbf{e}_3 - x_3 \mathbf{e}_1 = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_3 - \cos \theta \mathbf{e}_1 = \sin \varphi \cos \theta \boldsymbol{\varphi} - \cos \varphi \boldsymbol{\theta}.$$

$$\langle D\Phi u_{1,3}, u_{1,3} \rangle = 0 \iff \langle \sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi \Phi - \cos \varphi \partial_\theta \Phi, \sin \varphi \cos \theta \boldsymbol{\varphi} - \cos \varphi \boldsymbol{\theta} \rangle = 0.$$

Comme d'après ce qui précède $\sin \theta \langle \partial_\varphi \Phi, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$, ceci est encore équivalent à :

$$-\sin \varphi \cot \theta \cos \varphi \langle \partial_\varphi \Phi, \boldsymbol{\theta} \rangle - \cos \varphi \langle \partial_\theta \Phi, \sin \varphi \cos \theta \boldsymbol{\varphi} - \cos \varphi \boldsymbol{\theta} \rangle = 0,$$

i.e.

$$\cos \varphi \underbrace{[-\sin \varphi \cot \theta (\partial_\varphi a - b \cos \theta) - \sin \varphi \cos \theta \partial_\theta b + \cos \varphi (\alpha + \partial_\theta a)]}_{:=f(\theta, \varphi)} = 0.$$

La fonction f est régulière sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ et $\varphi \mapsto \cos \varphi$ ne s'annule que sur les méridiens $\{\varphi = \frac{\pi}{2}\} \cup \{\varphi = \frac{3\pi}{2}\}$. Le produit est donc nul si et seulement si $f = 0$ sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ et donc :

$$\langle D\Phi u_{1,3}, u_{1,3} \rangle = 0 \iff -\sin \varphi \cot \theta (\partial_\varphi a - b \cos \theta) - \sin \varphi \cos \theta \partial_\theta b + \cos \varphi (\alpha + \partial_\theta a) = 0.$$

Enfin,

$$u_{2,3} = x_2 \mathbf{e}_3 - x_3 \mathbf{e}_2 = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_3 - \cos \theta \mathbf{e}_2 = -\cos \theta \cos \varphi \boldsymbol{\varphi} - \sin \varphi \boldsymbol{\theta}$$

et

$$\langle D\Phi u_{2,3}, u_{2,3} \rangle = 0 \iff \langle -\cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \Phi - \sin \varphi \partial_\theta \Phi, -\cos \theta \cos \varphi \boldsymbol{\varphi} - \sin \varphi \boldsymbol{\theta} \rangle = 0.$$

Et réutilisant le fait que $\sin \theta \langle \partial_\varphi \Phi, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0$, ceci est équivalent à :

$$\cot \theta \cos \varphi \sin \varphi \langle \partial_\varphi \Phi, \boldsymbol{\theta} \rangle - \sin \varphi \langle \partial_\theta \Phi, -\cos \theta \cos \varphi \boldsymbol{\varphi} - \sin \varphi \boldsymbol{\theta} \rangle = 0,$$

i.e.

$$\sin \varphi \underbrace{[\cot \theta \cos \varphi (\partial_\varphi a - b \cos \theta) + \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta b + \sin \varphi (\alpha + \partial_\theta a)]}_{:=g(\theta, \varphi)} = 0.$$

La fonction g est régulière sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ et $\varphi \mapsto \sin \varphi$ ne s'annule que sur les méridiens $\{\varphi = \pi\} \cup \{\varphi = 2\pi\}$. Le produit est donc nul si et seulement si $g = 0$ sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ et donc :

$$\langle D\Phi u_{2,3}, u_{2,3} \rangle = 0 \iff \cot \theta \cos \varphi (\partial_\varphi a - b \cos \theta) + \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta b + \sin \varphi (\alpha + \partial_\theta a) = 0.$$

On vient donc de prouver l'équivalence suivante : pour $1 \leq i < j \leq 3$,

$$\forall x \in \mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\} \quad \langle D\Phi u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = 0$$

si et seulement si α , a et b sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$:

$$\begin{cases} \alpha \sin \theta + a \cos \theta + \partial_\varphi b = 0 \\ -\sin \varphi \cot \theta (\partial_\varphi a - b \cos \theta) - \sin \varphi \cos \theta \partial_\theta b + \cos \varphi (\alpha + \partial_\theta a) = 0 \\ \cot \theta \cos \varphi (\partial_\varphi a - b \cos \theta) + \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta b + \sin \varphi (\alpha + \partial_\theta a) = 0 \end{cases}$$

Étudions maintenant ce nouveau système. Pour cela, posons $\tilde{a} := \frac{a}{\sin \theta}$ et $\tilde{b} := \frac{b}{\sin \theta}$ et divisons toutes les équations par $\sin \theta$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ -\sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi \tilde{a} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (\alpha + \partial_\theta a) = \sin \varphi \cos \theta \frac{\sin \theta \partial_\theta b - \cos \theta b}{\sin^2 \theta} \\ \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \tilde{a} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (\alpha + \partial_\theta a) = -\cos \varphi \cos \theta \frac{\sin \theta \partial_\theta b - \cos \theta b}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$

Remplaçons α grâce à la première équation et remarquons que $\partial_\theta \left(\frac{f}{\sin \theta} \right) = \frac{\sin \theta \partial_\theta f - \cos \theta f}{\sin^2 \theta}$,

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ -\sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi \tilde{a} + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (-\tilde{a} \cos \theta - \partial_\varphi \tilde{b} + \partial_\theta a) = \sin \varphi \cos \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \tilde{a} + \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} (-\tilde{a} \cos \theta - \partial_\varphi \tilde{b} + \partial_\theta a) = -\cos \varphi \cos \theta \partial_\theta \tilde{b} \end{cases}$$

qui est encore équivalent à :

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ -\sin \varphi \cot \theta \partial_\varphi \tilde{a} - \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi \tilde{b} + \cos \varphi \partial_\theta \tilde{a} = \sin \varphi \cos \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \tilde{a} - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi \tilde{b} + \sin \varphi \partial_\theta \tilde{a} = -\cos \varphi \cos \theta \partial_\theta \tilde{b} \end{cases}$$

Changeons les deux dernières lignes L_2 et L_3 respectivement en $\sin \varphi L_2 - \cos \varphi L_3$ et en $\cos \varphi L_2 + \sin \varphi L_3$, le système précédent est encore équivalent à :

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ -\cot \theta \partial_\varphi \tilde{a} = \cos \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \tilde{b} = -\partial_\theta \tilde{a} \end{cases}$$

Le même argument que précédemment montre que le produit $\cos \theta \left(-\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \tilde{a} - \partial_\theta \tilde{b} \right)$ est nul sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ si et seulement si $-\frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \tilde{a} = \partial_\theta \tilde{b}$. Le système précédent est donc équivalent à :

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ \partial_\varphi \tilde{a} = -\sin \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ \partial_\varphi \tilde{b} = \sin \theta \partial_\theta \tilde{a} \end{cases}$$

Les conditions de compatibilité des deux dernières équations s'écrivent : $\partial_\theta \partial_\varphi \tilde{a} = \partial_\varphi \partial_\theta \tilde{a}$ et $\partial_\theta \partial_\varphi \tilde{b} = \partial_\varphi \partial_\theta \tilde{b}$. La première condition est équivalente à :

$$-\cos \theta \partial_\theta \tilde{b} - \sin \theta \partial_\varphi^2 \tilde{b} = \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi^2 \tilde{b}$$

c'est-à-dire :

$$\cos \theta \partial_\theta \tilde{b} + \sin \theta \partial_\theta^2 \tilde{b} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi^2 \tilde{b} = 0.$$

Divisant par $\sin \theta$, on reconnaît l'expression du laplacien sur \mathbb{S}^2 et la première condition de compatibilité est donc équivalente à $\Delta_{\mathbb{S}^2} \tilde{b} = 0$. On montre de même que la seconde est équivalente à $\Delta_{\mathbb{S}^2} \tilde{a} = 0$, ce qui prouve le théorème. \square

On a un corollaire de ce théorème qui permet d'exprimer les choses de manière un peu plus symétrique :

16.2.2 Démonstration du corollaire II.12

Démonstration. Montrons que :

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{1,2} \rangle}{|u_{1,2}|^2} \right) (x) &= 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,2}| = 0\}, \\ \Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{1,3} \rangle}{|u_{1,3}|^2} \right) (x) &= 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,3}| = 0\}, \\ \Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{2,3} \rangle}{|u_{2,3}|^2} \right) (x) &= 0 \quad \text{pour } x \text{ dans } \mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{2,3}| = 0\}.\end{aligned}$$

Pour obtenir la première égalité, il suffit de remarquer qu'avec les notations du théorème précédent, $\mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,2}| = 0\} = \mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ et $\varphi = \frac{u_{1,2}}{\sin \theta}$ de sorte que :

$$\tilde{b} = \frac{b}{\sin \theta} = \frac{\langle \Phi, \varphi \rangle}{\sin \theta} = \frac{\langle \Phi, u_{1,2} \rangle}{|u_{1,2}|^2}.$$

Les deux autre égalités sont obtenues grâce à la proposition II.19. Pour la permutation $\tau = (13)$, $(\tau * \Phi)(x) = (\Phi_3(x_3, x_2, x_1), \Phi_2(x_3, x_2, x_1), \Phi_1(x_3, x_2, x_1))$ est encore une entropie, par conséquent pour x dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,2}| = 0\}$,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \tau * \Phi, u_{1,2} \rangle}{|u_{1,2}|^2} \right) (x) = 0.$$

Montrons maintenant que pour f dans $C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ et $g(x) := f(\tau \cdot x)$,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2}[f](x) = \Delta_{\mathbb{S}^2}[g](\tau \cdot x). \quad (70)$$

Admettons un instant l'égalité précédente. Alors, la troisième égalité de ce corollaire est prouvée. En effet, si $f(x) = \frac{\langle \tau * \Phi, u_{1,2} \rangle}{|u_{1,2}|^2} = \frac{-x_2 \Phi_3(x_3, x_2, x_1) + x_1 \Phi_2(x_3, x_2, x_1)}{|u_{1,2}|^2}$,

$$g(x) = f(\tau \cdot x) = \frac{-x_2 \Phi_3(x_1, x_2, x_3) + x_3 \Phi_2(x_1, x_2, x_3)}{|u_{2,3}|^2} = -\frac{\langle \Phi, u_{2,3} \rangle}{|u_{2,3}|^2}.$$

Par conséquent, pour tout x dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,2}| = 0\}$

$$-\Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \tau * \Phi, u_{1,2} \rangle}{|u_{1,2}|^2} \right) (x) = \Delta_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{\langle \Phi, u_{2,3} \rangle}{|u_{2,3}|^2} \right) (\tau \cdot x) = 0.$$

Comme $x \mapsto \tau \cdot x$ est une bijection de $\mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{2,3}| = 0\}$ sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{|u_{1,2}| = 0\}$, on obtient bien la troisième égalité. Il reste donc à prouver la relation (70). On va la prouver pour le laplacien sur \mathbb{R}^d l'identité (70) s'en déduisant par prolongement. Soit f dans $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et $g(x) := f(\tau \cdot x)$. Alors,

$$\begin{aligned}\Delta[g](\tau \cdot x) &= \partial_1^2[g](\tau \cdot x) + \partial_2^2[g](\tau \cdot x) + \partial_3^2[g](\tau \cdot x) \\ &= \partial_3^2 f(x) + \partial_2^2 f(x) + \partial_1^2 f(x) = \Delta f(x).\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité pour le laplacien sur \mathbb{R}^d . Pour f dans $C^\infty(\mathbb{S}^2)$ et $g(x) := f(\tau \cdot x)$, on peut prolonger radialement f et g en deux fonctions régulières \tilde{f} et \tilde{g} définies sur \mathbb{R}^2 et telles que pour x sur la sphère,

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} f(x) = \Delta \tilde{f}(x) \quad \text{et} \quad \Delta_{\mathbb{S}^2} g(x) = \Delta \tilde{g}(x).$$

L'égalité précédente permet alors de conclure et on a montré l'identité (70). Pour montrer la deuxième égalité du corollaire, on procède de même en considérant la permutation $\tau := (2\ 3)$. \square

La proposition suivante nous montre comment construire explicitement les solutions du système d'équations aux dérivées partielles (38).

Pour cela, rappelons qu'on définit la projection stéréographique de $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0\}$ sur \mathbb{C} par :

$$P: \mathbb{S}^2 \setminus \{P_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

P est un difféomorphisme régulier de $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0\}$ sur \mathbb{C} . On peut alors définir l'application

$$T: C^\infty(\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\})^3 \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{*2})^3 \\ (\alpha, \tilde{a}, \tilde{b}) \longmapsto (q, u, v) = (\alpha \circ P^{-1}, \tilde{a} \circ P^{-1}, \tilde{b} \circ P^{-1})$$

C'est une bijection de l'ensemble des fonctions régulières sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ sur l'ensemble des fonctions régulières sur \mathbb{R}^{*2} .

En identifiant de manière habituelle \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , on a alors la proposition suivante :

Proposition II.31. $(\alpha, \tilde{a}, \tilde{b})$ est solution du système (38) sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$ si et seulement si il existe une fonction holomorphe f sur \mathbb{C}^* telle que :

$$f = v + iu$$

et pour tout z dans \mathbb{C}^* ,

$$q = u \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} + y \partial_x v - x \partial_y v$$

où $(q, u, v) = T(\alpha, \tilde{a}, \tilde{b})$.

Démonstration. Nous allons simplement réécrire le système (38) grâce à la projection stéréographique.

Rappelons tout d'abord que les coordonnées sphériques sur \mathbb{S}^2 et les coordonnées sur \mathbb{C} sont liées par les relations :

$$|z| = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} \quad \cos \theta = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \\ z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$(\alpha, \tilde{a}, \tilde{b})$ est solution du système :

$$\begin{cases} \alpha + \tilde{a} \cos \theta + \partial_\varphi \tilde{b} = 0 \\ \partial_\varphi \tilde{a} = -\sin \theta \partial_\theta \tilde{b} \\ \partial_\varphi \tilde{b} = \sin \theta \partial_\theta \tilde{a} \end{cases}$$

si et seulement si :

$$\begin{cases} q + u \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} + \partial_\varphi [v(|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)] = 0 \\ \partial_\varphi [u(|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)] = -\sin \theta \partial_\theta [v(|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)] \\ \partial_\varphi [v(|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)] = \sin \theta \partial_\theta [u(|z| \cos \varphi, |z| \sin \varphi)] \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} q + u \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - y \partial_1 v + x \partial_2 v = 0 \\ -y \partial_1 u + x \partial_2 u = -\sin \theta \partial_\theta |z| (\cos \varphi \partial_1 v + \sin \varphi \partial_2 v) \\ -y \partial_1 v + x \partial_2 v = \sin \theta \partial_\theta |z| (\cos \varphi \partial_1 u + \sin \varphi \partial_2 u) \end{cases}$$

Comme

$$\partial_\theta |z| = \frac{-\sin \theta}{|z|(1 - \cos \theta)^2},$$

ceci est encore équivalent à :

$$\begin{cases} q + u \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - y \partial_1 v + x \partial_2 v = 0 \\ -y \partial_1 u + x \partial_2 u = \frac{\sin^2 \theta}{|z|(1 - \cos \theta)^2} (\cos \varphi \partial_1 v + \sin \varphi \partial_2 v) \\ -y \partial_1 v + x \partial_2 v = -\frac{\sin^2 \theta}{|z|(1 - \cos \theta)^2} (\cos \varphi \partial_1 u + \sin \varphi \partial_2 u) \end{cases}$$

Utilisant le fait que $|z|^2 = \frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}$,

$$\begin{cases} q + u \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - y \partial_1 v + x \partial_2 v = 0 \\ -y \partial_1 u + x \partial_2 u = x \partial_1 v + y \partial_2 v \\ -x \partial_1 u - y \partial_2 u = -y \partial_1 v + x \partial_2 v \end{cases}$$

Changeant L_2 en $xL_2 - yL_3$ et L_3 en $-yL_2 - xL_3$, on obtient

$$\begin{cases} q + u \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} - y \partial_1 v + x \partial_2 v = 0 \\ |z|^2 (\partial_2 u - \partial_1 v) = 0 \\ |z|^2 (\partial_1 u + \partial_2 v) = 0 \end{cases}$$

Divisant les deux dernières équations par $|z|^2$, on reconnait dans ces équations les équations de Cauchy-Riemann. Il existe donc une fonction holomorphe sur \mathbb{C}^* telle que pour z dans \mathbb{C}^*

$$f = v + iu,$$

ce qui prouve la proposition. \square

Le corollaire II.32 est une conséquence immédiate de cette proposition.

Corollaire II.32. *Si Φ est une entropie régulière sur \mathbb{S}^2 , il existe une fonction holomorphe $f = v + iu$ sur \mathbb{C}^* telle que pour tout x dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$,*

$$\Phi(x) = \left(\frac{x_2}{1-x_3} \partial_1 v(P(x)) - \frac{x_1}{1-x_3} \partial_2 v(P(x)) \right) x + \begin{pmatrix} -x_2 v(P(x)) \\ x_1 v(P(x)) \\ -u(P(x)) \end{pmatrix}. \quad (71)$$

Démonstration. C'est simplement une réécriture de ce qui précède : si Φ est une entropie régulière,

$$\Phi = \alpha \mathbf{r} + \tilde{a} \sin \theta \boldsymbol{\theta} + \tilde{b} \sin \theta \boldsymbol{\varphi}$$

où $(\alpha, \tilde{a}, \tilde{b})$ sont solutions de (38) sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$. Utilisant la proposition II.31 et remarquant que :

$$\sin \theta \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin^2 \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 x_1 \\ x_3 x_2 \\ -x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\sin \theta \boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Φ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \left(-x_3 u(P(x)) + \frac{x_2}{1-x_3} \partial_1 v(P(x)) - \frac{x_1}{1-x_3} \partial_2 v(P(x)) \right) x \\ & + u(P(x)) \begin{pmatrix} x_3 x_1 \\ x_3 x_2 \\ -x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} + v(P(x)) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Simplifiant cette expression, on obtient le corollaire. \square

Il est déjà intéressant de voir quelles sont les fonctions holomorphes associées aux entropies triviales par le corollaire précédent. Si $\Phi(x) = w$ pour $w \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} u(P(x)) = \tilde{a} &= \frac{\langle \Phi, \sin \theta \boldsymbol{\theta} \rangle}{\sin^2 \theta} = \frac{w_1 x_1 x_3 + w_2 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2} - v_3, \\ v(P(x)) = \tilde{b} &= \frac{\langle \Phi, \sin \theta \boldsymbol{\varphi} \rangle}{\sin^2 \theta} = \frac{-w_1 x_2 + w_2 x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Comme

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \quad x_1 = x(1 - x_3) = \frac{2x}{1 + |z|^2} \quad x_2 = \frac{2y}{1 + |z|^2} \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{4|z|^2}{(1 + |z|^2)^2}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= w_1 \frac{2x(|z|^2 - 1)}{4|z|^2} + w_2 \frac{2y(|z|^2 - 1)}{4|z|^2} - w_3 \\ &= w_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2|z|^2} \right) + w_2 \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2|z|^2} \right) - w_3, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -w_1 \frac{2y(|z|^2 + 1)}{4|z|^2} + w_2 \frac{2x(|z|^2 + 1)}{4|z|^2} \\ &= -w_1 \left(\frac{y}{2} + \frac{y}{2|z|^2} \right) + w_2 \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2|z|^2} \right), \end{aligned}$$

de sorte que la fonction holomorphe associée à Φ s'écrit :

$$f(z) = v + iu = w_1 \frac{i}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) + w_2 \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) - w_3.$$

Si $\Phi(x) = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ -a_{1,2} & 0 & a_{2,3} \\ -a_{1,3} & -a_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u(P(x)) &= \frac{(a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3)x_1x_3 + (-a_{1,2}x_1 + a_{2,3}x_3)x_2x_3}{x_1^2 + x_2^2} - (-a_{1,3}x_1 - a_{2,3}x_2) \\ &= \frac{a_{1,3}x_1x_3^2 + a_{2,3}x_2x_3^2}{x_1^2 + x_2^2} + a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2. \end{aligned}$$

Utilisant le fait que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$,

$$u(P(x)) = \frac{a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

De même,

$$\begin{aligned} v(P(x)) &= \frac{-(a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3)x_2 + (-a_{1,2}x_1 + a_{2,3}x_3)x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= -a_{1,2} + \frac{-a_{1,3}x_3x_2 + a_{2,3}x_3x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Des calculs identiques aux précédents montrent que la fonction holomorphe associée à Φ vaut :

$$f(z) = a_{1,3} \frac{i}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) + a_{2,3} \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) - a_{1,2}.$$

Le théorème II.13 découle immédiatement de ce qui précède.

16.2.3 Démonstration du théorème II.13

Démonstration. D'après le théorème et la proposition II.31, la fonction Φ vérifie sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0, P_1\}$, pour tout $1 \leq i < j \leq 3$,

$$\langle D\Phi u_{i,j}, u_{i,j} \rangle = 0. \quad (72)$$

Si Φ se prolonge en une fonction $\hat{\Phi}$ dans $C^1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^2)$, il est clair que la relation (72) est vérifiée par $\hat{\Phi}$ sur \mathbb{S}^2 tout entier et $\hat{\Phi}$ est donc une entropie. \square

Remarque II.33. *On aimerait pouvoir utiliser le théorème précédent pour construire d'autre entropies régulières sur \mathbb{S}^2 que les entropies triviales. Malheureusement, nous n'y sommes pas parvenus.*

Remarquons quand même ce qu'il est possible de faire. Tout d'abord, il n'est pas difficile de trouver une fonction holomorphe f telle que la formule (39) se prolonge en une fonction $\hat{\Phi}$ régulière sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{P_0\}$: il suffit de prendre une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. Les calculs que nous avons fait sur un certain nombre d'exemple ne nous ont néanmoins menés qu'à des fonctions non prolongeables en P_0 .

17 Bilan et Perspectives

Nous étions donc parti d'une définition d'entropie en terme d'opérateurs différentiels et nous avons prouvé pour nos entropies des propriétés tout à fait semblables aux propriétés des entropies deux dimensionnelles, en particulier les théorèmes II.6, II.7.

Le gros point noir de toute cette construction tient au fait qu'il ne nous a pas été possible de construire d'entropie partout régulière en dimension plus grande que 2. Dans un premier temps, la chose la plus importante à faire et donc de voir si, ne serait-ce qu'en dimension 3, il existe *ou non* des entropies régulières sur la sphère entière. Nous nous sommes contentés pour le moment d'utiliser le corollaire II.13 en essayant de prolonger la formule (39) pour quelques exemples de fonctions holomorphes. Il faut maintenant comprendre de manière plus systématique sous quelles contraintes sur la fonction holomorphe f on peut prolonger l'expression (39).

S'il n'existe pas d'entropie régulière en dimension 3, il est peu probable d'en trouver en dimension supérieure puisque en dimension d , une entropie est donnée par la contrainte de $\binom{d}{2}$ équations. Dans ce cas, si, comme nous le pensons, la conjecture II.8 est vraie, cela permettrait néanmoins de voir qu'il est vain de chercher des fonctions Φ régulières et telles que pour tout ouvert Ω et tout champ dans $C_{rot}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{S}^{d-1})$,

$$\nabla \cdot [\Phi \circ m] = 0$$

en dimension strictement plus grande que 2.

Une autre application qui nous semble intéressante pourrait être la suivante : il existe de nombreux problèmes variationnels où l'on veut minimiser une énergie du type de celle donnée par l'égalité (26) avec une contrainte de rotationnel nul en ajoutant de plus une pénalisation de l'anisotropie du champ m considéré dans l'énergie. Dans ce cas, on s'attend à ce qu'une configuration optimale ne visite plus la sphère \mathbb{S}^2 tout entière mais seulement une partie de celle-ci. Il serait intéressant de voir si on peut obtenir de bonnes bornes inférieures pour une énergie de ce type grâce au corollaire II.32, qui permet de construire des entropies régulières en dehors d'un point de la sphère.

Troisième partie

A necessary condition for lower semicontinuity of line energies

Sommaire

18 Introduction	72
18.1 Line energies	72
18.2 Related models	73
18.3 Lower semicontinuity, Viscosity solution	75
19 Construction of a competitor of the viscosity solution	77
20 Lower semicontinuity of line energies, proof of theorem III.4.	81

18 Introduction

18.1 Line energies

This chapter is written in collaboration with Antonin Monteil.

Let Ω be a Lipschitz domain in \mathbb{R}^2 . We are interested in measurable vector fields $m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ such that

$$|m| = 1 \text{ a.e. and } \nabla \cdot m = 0 \text{ on } \Omega, \quad (73)$$

where the second equation holds in a distributional sense. In the following, we will assume that m is of bounded variation so as to be able to define its *jump line*. So, we consider the set

$$A(\Omega) := \{m \in BV(\Omega, \mathbb{R}^2) : |m| = 1 \text{ a.e. and } \nabla \cdot m = 0 \text{ on } \Omega\}.$$

Vector fields $m \in A(\Omega)$ are related to solutions of the *eikonal equation* in Ω . Let define the set

$$S(\Omega) := \{\varphi \in \text{Lip}(\Omega) : |\nabla \varphi| = 1 \text{ a.e. and } \nabla \varphi \in BV(\Omega)\}.$$

Then, given $m \in A(\Omega)$, there exist a scalar function $\varphi \in S(\Omega)$ such that

$$m(x) = (\nabla \varphi(x))^\perp \text{ a.e.,}$$

where $(\nabla \varphi)^\perp = R \nabla \varphi$ stands for the image of $\nabla \varphi$ by the rotation R of angle $\pi/2$ centered at the origin in \mathbb{R}^2 . Moreover, a function $\varphi \in \text{Lip}(\Omega)$ satisfying $(\nabla \varphi)^\perp = m$ a.e. is unique up to a constant and is called stream function. We are now able to define line energies :

Definition III.1. Let $f: [0, 2] \rightarrow [0, +\infty]$ be a measurable scalar function. Let $m \in A(\Omega) \subset BV(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Then, there exists a \mathcal{H}^1 -rectifiable jump line $J(m)$ oriented by a unit normal vector ν_x such that m has traces $m_\pm(x) \in \mathbb{S}^1$ on each side of $J(m)$ for \mathcal{H}^1 a.e. $x \in J(m)$ (see [4] for more details).

Then, the energy associated to the jump cost f is denoted by \mathcal{I}_f and defined for $m \in A(\Omega)$ as follows :

$$\mathcal{I}_f(m) = \int_{J(m)} f(|m_+ - m_-|) d\mathcal{H}^1(x). \quad (74)$$

f is called the jump cost. Note that the divergence constraint on $m \in A(\Omega)$ implies that for a.e. $x \in J(m)$, $m_\pm(x) \in \mathbb{S}^1$ and ν_x satisfy the following condition (see figure 9) :

$$m_+(x) \cdot \nu_x = m_-(x) \cdot \nu_x. \quad (75)$$

Then, in the orthogonal basis (ν_x, ν_x^\perp) , there exists some angle θ such that $m_\pm = (\cos \theta, \pm \sin \theta)$ and the jump size is defined as

$$t = |m_+ - m_-| = 2|\sin \theta|.$$

Similarly, \mathcal{I}_f can be interpreted as a functional of the stream function on the set $S(\Omega)$: Writing $m = (\nabla\varphi)^\perp \in BV(\Omega, \mathbb{R}^2)$, then $\mathcal{I}_f(m) = \mathcal{J}_f(\varphi)$ where

$$\forall \varphi \in S(\Omega), \quad \mathcal{J}_f(\varphi) = \int_{J(\nabla\varphi)} f(|(\nabla\varphi)_+ - (\nabla\varphi)_-|) d\mathcal{H}^1(x). \quad (76)$$

An interesting question is to find the minimizing structures of \mathcal{I}_f if it exists. Remark that for this problem to be relevant, we have to consider a constraint on the boundary otherwise all constant functions are minimizers. A natural choice is to minimize \mathcal{I}_f along all configurations m belonging to the set

$$A_0(\Omega) := \{m \in A(\Omega) : m \cdot n = 0 \text{ a.e. on } \partial\Omega\}, \quad (77)$$

where n is the exterior unit normal vector of $\partial\Omega$. In terms of the stream function φ , this is equivalent to consider the set

$$S_0(\Omega) := \{\varphi \in S(\Omega) : \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \quad (78)$$

18.2 Related models

Line energies naturally appear in micromagnetics when studying the asymptotic behavior of the magnetization in a thin ferromagnetic sample. We are going to give two simplified micromagnetic models illustrating this phenomenon.

The first example is due to P. Aviles. and Y. Giga. In [5], they have conjectured that if $f(t) = \frac{1}{3}t^3$, then \mathcal{I}_f is the Γ -limit of the following Ginzburg-Landau type energy functional

$$\begin{cases} AG_\varepsilon(u) = \int_\Omega \varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} (1 - |u|^2)^2 & \text{if } u \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ and } \nabla \cdot u = 0, \\ AG_\varepsilon(u) = +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (79)$$

where Ω is a bounded open set in \mathbb{R}^2 and $\varepsilon > 0$ is some parameter.

It is clear that finite energy limiting configurations u , i.e. limits of finite energy sequences $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, have to be solutions of (73). It is also straightforward to see that the energy will concentrate on the singular set of u . However, it is a challenging problem to determine rigorously the asymptotic behavior of these functionals when ε goes to zero. More precisely, given some energies E_ε depending on $\varepsilon > 0$, a fundamental question is to find some appropriate topology, given by the L^1 distance for instance, and some limiting energy E_0 such that the three following properties hold (see [11] for example) :

1. Compactness : If $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is a finite energy sequence, i.e. $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon) < \infty$, then $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is relatively compact.
2. The sequence $(E_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ Γ -converges to E_0 , that is :
 - Γ -liminf property : For all sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converging to some u ,

$$E_0(u) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

- Γ -limsup property : for all u , there exists a sequence $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converging to u such that :

$$E_0(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

For the Γ -convergence of functionals $E_\varepsilon = AG_\varepsilon$ to $E_0 = \mathcal{I}_f$ with $f(t) = \frac{1}{3}t^3$, only partial results are shown. In [5], the authors have been able to prove the Γ -liminf property for the L^1 convergence using the notion of entropies related to the problem (73) (see also [29]). Unfortunately, the Γ -limsup is still an open problem for limiting configurations $u \notin BV(\Omega, \mathbb{R}^2)$. The strong compactness of finite energy sequences has been proved by Ambrosio, De Lellis and Mantegazza in [3] and by De Simone, Kohn, Müller and Otto in [14] using a compensated compactness method based on a new notion of regular entropy on \mathbb{R}^2 . This notion of entropy together with the kinetic equation has also been used in [25] to characterize the structure of zero-energy states of (79) and in [26] to deduce some regularity properties in the limit.

The second model we want to address comes from the Ginzburg-Landau theory in thin film micromagnetics for some asymptotical regime (see [21]). Given a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and a magnetization $m = (m_1, m_2, m_3): \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$, where \mathbb{S}^2 stands for the unit sphere in \mathbb{R}^3 , the energy of m is defined as follows :

$$E_\varepsilon(m) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \phi(m) + \frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}^2} |H|^2, \quad (80)$$

where :

- ε is a small parameter called exchange length and $0 < \beta < \varepsilon$.
- $\phi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is some smooth function called anisotropy function such that :

$$\begin{cases} \phi(m) = 0 & \text{if } m \in \mathbb{S}^2 \cap \{m_3 = 0\}, \\ \phi(m) > 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (81)$$

- $H \in L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ is the solution, called stray field, of the following problem :

$$\begin{cases} \nabla \times H = 0 & \text{on } \mathbb{R}^2, \\ \nabla \cdot H = \nabla \cdot m' & \text{on } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

where $m' = (m_1, m_2)$.

A simplified model consists in adding a divergence constraint $\nabla \cdot m' = 0$ to the functional so that the last term disappears : this is equivalent to take the limit when β tends to 0.

A finite energy sequence $(m_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ is expected to converge to some divergence free and unit length vector field m . Some experiments show that, at least for ε very small, the magnetization is smooth out of a thin layer (very close to a line) of size ε on which it changes very quickly between two values m_\pm (see [18]). The microstructures formed by the magnetization into this layer can be more or less complex. In the simplest case, it is one-dimensional, i.e. it depends only on the normal (to the jump line) variable. However more complex structures can appear as cross-tie wall ([2], [33]) or zigzag-patterns ([23]) for example.

If $\phi(m) = |m_3|^\alpha$ with $0 < \alpha \leq 4$, only one-dimensional structures are expected and it is easy to compute what should be the limiting energy of functionals E_ε by a 1D-analysis. As for the Modica-Mortola model for phase transition ([31]), E_ε is expected

to Γ -converge to $c\mathcal{I}_f$ for some $c > 0$ where $f(t) = \frac{t^p}{p}$, $p = 1 + \frac{\alpha}{2}$ is the primitive of $\sqrt{\phi}$ vanishing at 0.

The case $\phi(m) = |m_3|^2$ was studied by R. Ignat and B. Merlet in [22] in which a compactness result was proved and a lower bound was found. However, the Γ -liminf property in the definition of Γ -convergence was established only for limiting 1D configurations of the form $m(x) = \pm\nu^\perp$ for $\pm x \cdot \nu > 0$ with $\nu \in \mathbb{S}^1$ (see figure 9 with $\theta_0 = \pi/2$).

18.3 Lower semicontinuity, Viscosity solution

As explained above, some of the line energies \mathcal{I}_f are conjectured to be the Γ -limit of functionals coming from micromagnetics in the space $X = L^1$. If that is the case, \mathcal{I}_f has to satisfy the following lower semicontinuity property :

Definition III.2. *Let $F : X \rightarrow [0, +\infty]$ be a functional defined on some topological space X . F is said to be lower semicontinuous or l.s.c. if the following holds :*

$$\forall (x_n)_{n \geq 0} \subset X \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x, \quad F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

Since this property strongly depends on the topology of the space X , we have to specify the choice we make for the study of line energies \mathcal{I}_f .

First of all, due to the non convex constraint $|m| = 1$, we need strong compactness in L^1 . Moreover, since all the results of the previous part (compactness and Γ -liminf property) holds for the L^1 strong topology, it seems natural to consider the line energies \mathcal{I}_f in the space $X = L^1$.

However, since definition III.1 uses the notion of trace of a function, another natural choice would be $X = BV$ endowed with the weak topology which is a very common choice for phase transition problems. Unfortunately, in the general case, the space BV is not adapted to our problem.

Suppose $f(t) = t^p$ with $p > 1$ for instance. Then finite energy configurations m (i.e. $m_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m$ in L^1 with $\mathcal{I}_f(m_n) \leq C < +\infty$) are not necessarily of bounded variation since the total variation of m around its jump line can't be controlled by $\int_{J(m)} |m_+ - m_-|^p$ if $p > 1$. That's why we need a subspace of solutions of the problem (73) included in $L^1(\Omega)$ (and containing BV) because of the non convex constraint $|m| = 1$ such that we are still able to define a jump line $J(m)$ and traces m_\pm . This is done in [13] where a regularity result is shown for solution of (73) with bounded "entropy production".

Note that if X and Y are two topological spaces such that Y is continuously embedded in X and $F : X \rightarrow [0, +\infty]$ is l.s.c. in X then the restriction of F to Y is l.s.c. in Y . In this paper, we only want to prove a necessary condition for functionals \mathcal{I}_f to be l.s.c.. We then prefer to restrict our analysis to BV functions (see remark III.6).

In the case where $f(t) = t^p$ for some $p > 0$, only partial results are known. In [3], the following is conjectured :

Conjecture III.3. Let $\overline{\mathcal{I}}_f$ be the relaxation of \mathcal{I}_f (only defined on the space BV) in L^1 :

$$\overline{\mathcal{I}}_f(m) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_f(m_n) : m_n \in BV \text{ and } m_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} m \text{ in } L^1 \right\}. \quad (82)$$

If $f(t) = t^p$ with $1 \leq p \leq 3$ then $\overline{\mathcal{I}}_f$ is l.s.c. for the strong topology in L^1 .

For $p > 3$, this conjecture is false (see [?]). The case $p = 3$ has been studied by P. Aviles and Y. Giga in [5]. More recently the case $p = 2$ has been proved by R. Ignat and B. Merlet in [22]. They also proved that for every $1 \leq p \leq 3$, there exist cost-functions $f(t) = t^p$ for $t \in [0, \sqrt{2}]$ leading to a l.s.c functional $\overline{\mathcal{I}}_f$ i.e. the conjecture is true for every $1 \leq p \leq 3$ if we restrict the jump to angles between 0 and $\pi/4$. Here we are interested in the open case $p < 1$.

We point out that line energies associated to the cost $f(t) = t^p$ with $1 \leq p \leq 3$ correspond exactly to the expected Γ -limits of functionals (80) when $\phi(m) = |m_3|^\alpha$ with $0 < \alpha \leq 4$ where bloch walls seem to be optimal. This is quite natural since when 2D structures, as cross tie wall or zigzag wall for instance, have less energy than bloch walls, the Γ -limit of these functionals may be non lower semicontinuous. In the next part, we are going to give a 2D construction which gives some necessary condition on f for \mathcal{I}_f to be l.s.c. This condition excludes cost functions of the form $f(t) = t^p$ with $p < 1$:

Théorème III.4. Let $f: [0, 2] \rightarrow [0, +\infty]$. Let Ω be an open and non empty subset of \mathbb{R}^2 . Assume that \mathcal{I}_f is lower semicontinuous in $X = BV(\Omega, \mathbb{S}^1)$ endowed with the weak topology. Then f is lower semicontinuous and we have

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \leq 2 \limsup_{t \rightarrow 2} f(t). \quad (83)$$

Remark III.5. The fact that the lower semicontinuity of \mathcal{I}_f implies the lower semicontinuity of f has already been proved in [22]. The main new point here is the condition (83).

Remark III.6. Theorem III.4 is stronger than an equivalent formulation in which BV is replaced by some banach space X such that BV is continuously embedded in X and where \mathcal{I}_f is replaced by its relaxation in X .

Remark III.7. The inequality (83) in theorem III.4 is optimal in the sense that we can find a lower semicontinuous functionnal \mathcal{I}_f in $BV(\Omega, \mathbb{S}^1)$ for which

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 2 \limsup_{t \rightarrow 2} f(t).$$

This is based on a theorem of Ignat and Merlet in [22] stating that for a cost function f associated to an entropy, \mathcal{I}_f is l.s.c.. We just have to remark that the cost function $f(t) = t^3 \sqrt{4 - t^2}$ is associated to the entropy $\Phi(x) = \sin 3\theta x + 3 \cos 3\theta x^\perp$.

As we will see, the lower semicontinuity of functionals \mathcal{I}_f is closely related to the following question : Is the viscosity solution a minimizer of \mathcal{I}_f ? More precisely, it is expected that the following is true :

Conjecture III.8. Assume that $\overline{\mathcal{I}}_f$ is l.s.c. in L^1 and that Ω is convex. Then $(\nabla \varphi_0)^\perp$ is a global minimizer of \mathcal{I}_f where $\varphi_0(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.

For a regular domain Ω the distance function $\varphi_0(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ belongs to $S_0(\Omega)$ and $(\nabla\varphi_0)^\perp$ is the viscosity solution of the problem (73). In particular, if Ω is convex, φ_0 is concave and $-D^2\varphi_0$ is a positive vectorial radon measure. In [3], the authors give a microstructure which shows that this is false for $f(t) = t^p$ if $p > 3$. As explained below, we are going to give a structure with lower energy than the viscosity solution for $p < 1$.

Proposition III.9. *Let $f : [0, 2] \rightarrow [0, +\infty]$. There exists a convex domain Ω such that the following holds : let $\varphi_0 \in S_0(\Omega)$ be the distance function $\varphi_0(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Assume that φ_0 is a minimizer of \mathcal{J}_f defined by (76). Then f satisfies (83).*

Corollaire III.10. *There exists a convex domain Ω such that the viscosity solution is not a minimizer of \mathcal{I}_f if $f(t) = t^p$ with $p \in [0, 1[$.*

19 Construction of a competitor of the viscosity solution

In order to obtain inequality (83), we have to construct a domain Ω on which the jump size $t = |m_+ - m_-|$ of the viscosity solution along its singular set is very small. Then, we find a competitor whose jump size t is close to the maximal possible value $t = 2$. In other words, we want to substitute small jumps by large ones.

We will use the polar coordinates (r, θ) , $r \geq 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ and we will identify \mathbb{R}^2 and \mathbb{C} with the usual bijection. Let D be the unit disk and \mathcal{C} be its boundary.

Let θ_0 be a fixed angle in $]0, \pi/2[$ and define the two points $A = e^{i\theta_0}$ and $A' = e^{-i\theta_0}$ on the circle \mathcal{C} . Define also T_A (resp. $T_{A'}$) the tangent to the circle \mathcal{C} at the point A (resp. A').

We consider the domain Ω delimited by the large arc $\mathcal{C}_{\theta_0} = \{e^{i\theta} : |\theta| > \theta_0\}$, T_A and $T_{A'}$ (see figure 7). In other words Ω is the interior or the convex envelope of $\mathcal{C} \cup \{B\}$ where $B = T_A \cap T_{A'}$. Define also $\omega = \Omega \cap \{|\theta| < \theta_0 \text{ and } r > 0\}$ and $\Gamma = \partial\Omega \cap \partial\omega = [AB] \cup [A'B]$.

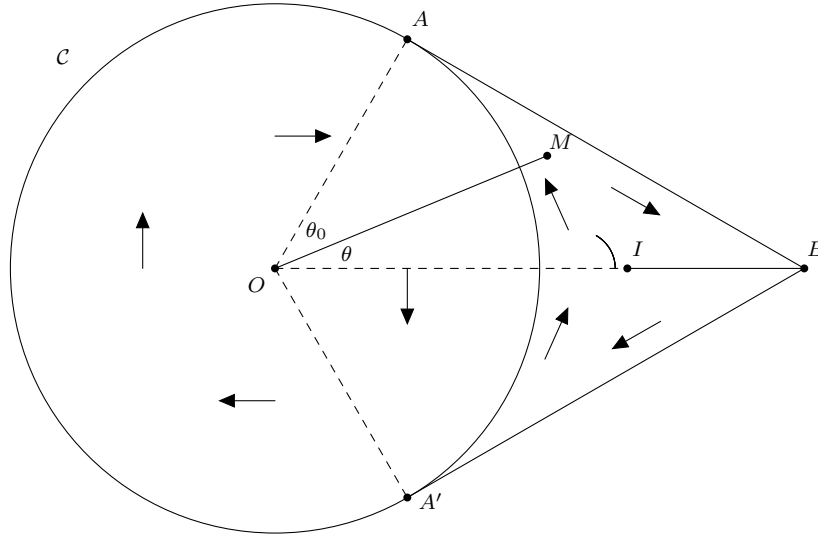
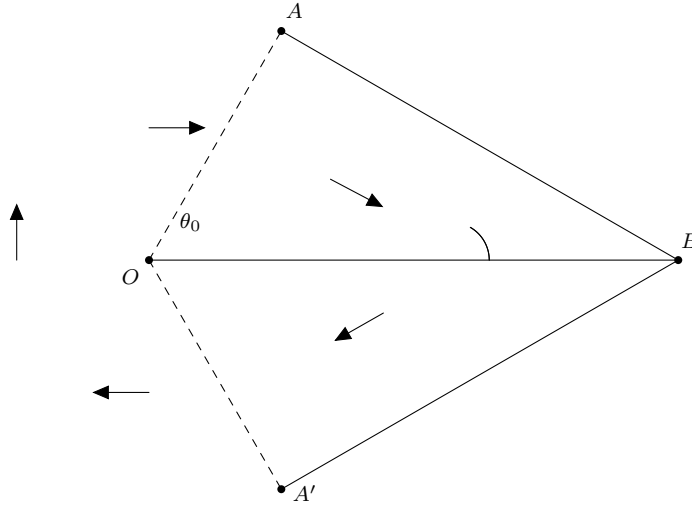
We now consider two solutions φ_0 and φ in $S_0(\Omega)$ of the eikonal equation vanishing on the border :

- φ_0 is the usual distance function : $\forall x \in \Omega$, $\varphi_0(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$.
- φ is the distance from the union of $\partial\Omega$ and the large arc $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\theta_0}$:
 $\forall x \in \Omega$, $\varphi(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega \cup \mathcal{C})$.

We also denote by $m_0 = (\nabla\varphi_0)^\perp$ and $m = (\nabla\varphi)^\perp$ the corresponding solutions of (73). Then $m_0, m \in A_0(\Omega)$.

We now compute $\mathcal{I}_f(m_0)$ and $\mathcal{I}_f(m)$ in order to prove that the function φ as lower energy than φ_0 if $f(t) = t^p$ with $p < 1$.

Heuristic : The idea is that a small jump along a fixed length is replaced by big jump on a small length : This will reduce the energy for subadditive power costs (i.e. $f(t) = t^p$ with $p < 1$) which favor "small jumps". Let us give more details.

FIGURE 7 – The domain Ω and the microstructure m FIGURE 8 – Viscosity solution m_0 on Ω

For a small angle $\theta_0 > 0$, m_0 only presents small jumps : m_0 is \mathcal{C}^1 out of segment $[OB]$ on which the jump size is $|m_0^+ - m_0^-| =: t_0 = 2 \sin(\theta_0)$.

On the contrary, m only presents "big" jumps : i.e. jumps whose size is close to 2. The singular set of m consists in 3 different lines : $[IB]$ whose length is equivalent to θ_0^2 and the two curves \mathcal{C}_{θ_0} and γ_{θ_0} (defined below) on which the jump size tends to 2 and the length of these lines is equivalent to $2\theta_0$.

As a result, the energy of m_0 is close to $f(2 \sin \theta_0)$ while the energy of m is close to $4\theta_0 \times f(2)$. A necessary condition for m_0 to minimize \mathcal{I}_f is then (see proposition III.9)

$$\limsup_{t \rightarrow 0} f(t)/t \leq 2f(2).$$

This excludes sub-additive power costs. Now let us give more details on the critical angle θ_0 .

Energy of m_0 : The jump line of m_0 is the segment $[OB]$ and the traces of m_0 on each side of this line are given by $m_{0,\pm} = -e^{i(\pi/2 \pm \theta_0)}$. In particular,

$$\mathcal{I}_f(m_0) = f(2 \sin \theta_0) |OB| = \frac{f(2 \sin \theta_0)}{\cos \theta_0}. \quad (84)$$

Energy of m : The jump line of m is the union of the 3 curves :

- $\mathcal{C}_{\theta_0} = \{e^{i\theta} : |\theta| < \theta_0\}$.
- $\gamma_{\theta_0} := \{z \in \omega : d(z, \mathcal{C}_{\theta_0}) = d(z, \Gamma)\} = \{z = re^{i\theta} : |\theta| < \theta_0, d(z, \mathcal{C}) = d(z, \partial\Omega)\}$.
- The segment $[IB]$ where $I = \gamma_{\theta_0} \cap [OB]$.

First, let us find a polar equation for the curve γ_{θ_0} : Given $z = re^{i\theta}$ such that $|\theta| < \theta_0$ and $r > 1$ we have $d(z, \mathcal{C}_{\theta_0}) = r - 1$, it remains to compute $\lambda := d(z, \Gamma)$.

Since Ω is symmetric with respect to the axe (OB) , one can restrict to the case $M = re^{i\theta}$ with $0 < \theta < \theta_0$. So $\lambda := d(z, \Gamma) = |z - P|$ where P is the orthogonal projection of $M = re^{i\theta}$ on the segment $[AB]$: P should satisfy $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{OA} = \lambda e^{i\theta_0}$ and $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

We then compute

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{MP} \cdot [\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP}] \\ &= \Re\{\lambda e^{-i\theta_0} (-e^{i\theta_0} + re^{i\theta} + \lambda e^{i\theta_0})\} \\ &= \lambda[-1 + r \cos(\theta_0 - \theta) + \lambda]. \end{aligned}$$

Since $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$, this implies $\lambda = MP = 1 - r \cos(\theta_0 - \theta)$.

Then we have $z \in \gamma_{\theta_0}$ if and only if $r - 1 = 1 - r \cos(\theta_0 - \theta)$ and the polar equation of the curve γ_{θ_0} is given by

$$r(\theta) = \frac{2}{1 + \cos(\theta_0 - \theta)} ; \quad -\theta_0 < \theta < \theta_0. \quad (85)$$

Now, we can compute the energy of m along the curve γ_{θ_0} :

- $d\gamma(\theta) = \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta$ where we find $r'(\theta) = \frac{-2 \sin(\theta_0 - \theta)}{(1 + \cos(\theta_0 - \theta))^2}$. Introducing the notation $\alpha = \theta_0 - \theta$, we obtain

$$d\gamma(\theta) = 2 \frac{\sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha}}{(1 + \cos \alpha)^2} d\theta = 2 \frac{\sqrt{2(1 + \cos \alpha)}}{(1 + \cos \alpha)^2} d\theta = \frac{4 \cos(\alpha/2)}{(2 \cos^2(\alpha/2))^2} d\theta.$$

So $d\gamma$ writes

$$d\gamma(\theta) = \cos^{-3}(\alpha/2) d\theta.$$

— The size of the jump at the point $\gamma(\theta)$ is given by

$$t(\theta) = |m_+ - m_-| = |e^{i(\theta_0 + \pi/2)} + e^{i(\theta + \pi/2)}| = |e^{i(\theta_0 - \theta)} + 1|.$$

Using once again the notation $\alpha = \theta_0 - \theta$, this gives

$$t(\theta) = \sqrt{(\cos \alpha + 1)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} = 2 \cos(\alpha/2).$$

— We conclude that the energy of m induced by the jump line γ_{θ_0} is given by

$$\mathcal{I}_f^1(m) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f[2 \cos(\alpha/2)]}{\cos^3(\alpha/2)} d\alpha. \quad (86)$$

The energy concentrated on the arc \mathcal{C}_{θ_0} is

$$\mathcal{I}_f^2(m) = f(2) \mathcal{H}^1(\mathcal{C}_{\theta_0}) = 2\theta_0 f(2). \quad (87)$$

Finally, we compute the energy on the line $[IB]$:

$$\mathcal{I}_f^3(m) = f(2 \sin \theta_0) |IB|. \quad (88)$$

If the distance function is a minimizer of \mathcal{I}_f we should have

$$\mathcal{I}_f(m) - \mathcal{I}_f(m_0) \geq 0.$$

Using these results, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_f(m) - \mathcal{I}_f(m_0) &= \mathcal{I}_f^1(m) + \mathcal{I}_f^2(m) + \mathcal{I}_f^3(m) - \mathcal{I}_f(m_0) \\ &= \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f[2 \cos(\alpha/2)]}{\cos^3(\alpha/2)} d\alpha + 2\theta_0 f(2) + (|IB| - |OB|) f(2 \sin \theta_0). \end{aligned}$$

Since $|IB| - |OB| = -|OI| = -r(0) = -\frac{1}{\cos^2(\theta_0/2)}$, this gives

$$\mathcal{I}_f(m) - \mathcal{I}_f(m_0) = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{f[2 \cos(\alpha/2)]}{\cos^3(\alpha/2)} d\alpha + 2\theta_0 f(2) - \frac{f(2 \sin \theta_0)}{\cos^2(\theta_0/2)}.$$

Hence, if m_0 is a minimizer of \mathcal{I}_f , the following condition should be satisfied :

$$\begin{aligned} \frac{f(2 \sin \theta_0)}{2 \sin \theta_0} &\leq \frac{\theta_0 \cos^2(\theta_0/2)}{\sin \theta_0} \left[\frac{1}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \frac{f[2 \cos(\alpha/2)]}{\cos^3(\alpha/2)} d\alpha + f(2) \right] \\ &\leq \frac{\theta_0}{\sin \theta_0 \cos(\theta_0/2)} \times 2 \sup\{f(t) : 2 \cos(\theta_0/2) \leq t \leq 2\}. \end{aligned}$$

Taking the lim sup for $\theta_0 \rightarrow 0$ leads to (83) :

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \leq 2 \limsup_{t \rightarrow 2} f(t).$$

This proves proposition III.9 and corollary III.10 follows from the fact that the preceding inequality holds false for $f(t) = t^p$ with $p < 1$. Note that in this case, we get something more precise than proposition III.9 :

Proposition III.11. *There exists $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ only depending on p such that for all $\theta \in]-\theta_0, \theta_0[$, the viscosity solution is not a minimizer of \mathcal{I}_f on Ω_θ where Ω_θ is the convex set constructed in the previous part (θ being the angle (\vec{OB}, \vec{OA})).*

20 Lower semicontinuity of line energies, proof of theorem III.4.

The fact that if \mathcal{I}_f is l.s.c then f is l.s.c can be found in [22] (proposition 1). In this section we prove that (83) is a necessary condition for \mathcal{I}_f to be lower semicontinuous with respect to the weak convergence in BV on bounded open subsets of \mathbb{R}^2 .

The key is to use the construction $m \in S(\Omega)$ depending on θ_0 of the first part by restriction to ω (See figure 9.). The 1D transition defined by (89) corresponds to the viscosity solution m_0 of the previous part. Given a small parameter $\epsilon > 0$, it will costs less energy to substitute the 1D transition around its jump line by the microstructures m rescaled at the level ϵ (see figure 10).

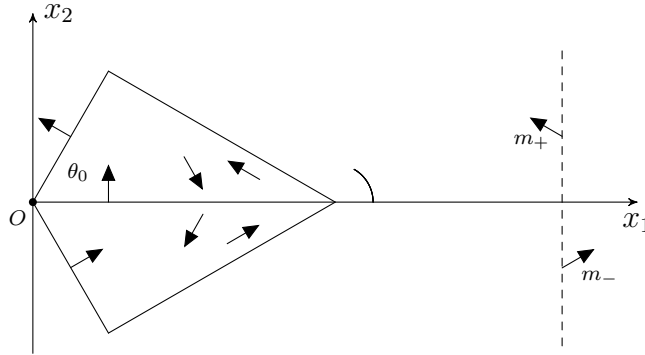


FIGURE 9 – The vector field m on the left and the 1D-transition m_0 on the right

We are going to prove theorem III.4 when $\Omega = [0, 1] \times [-1, 1]$. The general case follows easily.

Fix $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ and define the 1D transition m_0 for $x_1 \in [0, 1]$ and $x_2 \in \mathbb{R}$ by

$$m_0(x_1, x_2) = m_{\pm} := (\mp \sin \theta_0, \cos \theta_0) \text{ if } \pm x_2 > 0. \quad (89)$$

Then, let us consider the vector field $m = m_{\theta_0}$ of the preceding section restricted to ω and define the rescaled and prolonged vector field \tilde{m} for $x_1 \in [0, 1]$ and $x_2 \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{m}(x_1, x_2) = \begin{cases} -m((\cos \theta_0)^{-1} x_1, (\cos \theta_0)^{-1} x_2) & \text{if } ((\cos \theta_0)^{-1} x_1, (\cos \theta_0)^{-1} x_2) \in \omega, \\ m_0(x_1, x_2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that $\tilde{m} \in A(\Omega)$ and is continuous on $\partial\omega$. Then, let n be a positive integer and define $m_n \in M(\Omega)$ by aligning n times the vector field \tilde{m} (see figure 10). More precisely, for $0 \leq i < n$ and $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ such that $i/n \leq x_1 < (i+1)/n$, define

$$m_n(x_1, x_2) = \tilde{m}(n x_1 - i, n x_2).$$

(see figure 10). We have $m_n(x_1, x_2) = m_0(x_1, x_2)$ for $|x_2| > 1/n$ and $\forall x \in \Omega$, $|m_n(x)| = 1$. Consequently, $(m_n)_{n>0}$ converge to m_0 in $L^1(\Omega)$. Moreover, $|m_n|_{BV(\Omega)} = |\tilde{m}|_{BV(\Omega)}$ so that $(m_n)_{n>0}$ is bounded in $BV(\Omega)$ and weakly converge to m_0 .

Since m_n is obtain by scaling a fixed structure, it is easy to see that $\mathcal{I}_f(m_n)$ is constant. Indeed, $\mathcal{I}_f(m_n) = n \times 1/n \mathcal{I}_f(\tilde{m}) = \mathcal{I}_f(\tilde{m})$. That's why we obtain the following condition : assuming \mathcal{I}_f is *l.s.c.*,

$$\mathcal{I}_f(m_0) = f(2 \sin \theta_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_f(m_n) = \mathcal{I}_f(\tilde{m}).$$

In other words, the viscosity solution costs less energy than the construction m_{θ_0} of the preceding part. For this reason, we obtain exactly the same necessary condition (83) and theorem III.4 follows.

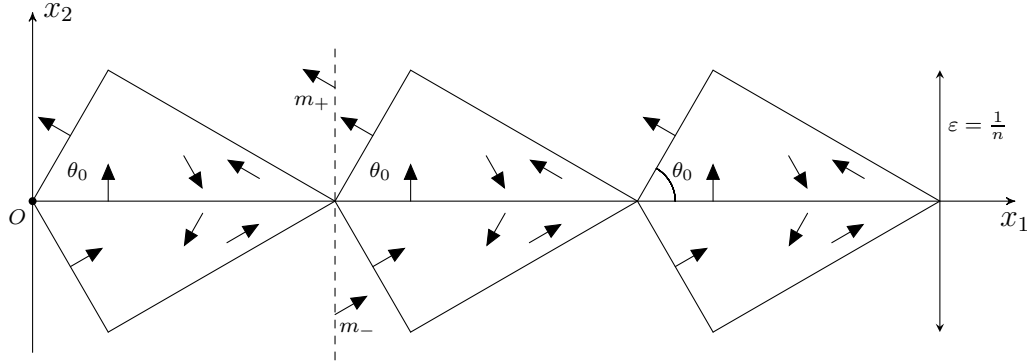


FIGURE 10 – The microstructure m_n

Quatrième partie

Une énergie de type Ginzburg-Landau

Sommaire

21	Energie deux dimensionnelle	84
22	Étude d'une énergie 1d	87
23	Borne supérieure en degré 0	90
23.0.1	Énergie sur A_1	92
23.0.2	Énergie sur A_3	92
23.0.3	Énergie sur A_2	94
24	Borne supérieure en degré 1	96
25	Borne inférieure	97
	Références	103

21 Energie deux dimensionnelle

Soit $B_R \subset \mathbb{R}^2$ le disque centré en l'origine et de rayon R . Fixons $\lambda > 0$. Le but de cette partie est l'étude asymptotique de la fonctionnelle de type Ginzburg-Landau suivante définie sur $H^1(B_R, \mathbb{R}^2)$:

$$E_\varepsilon(m) := \int_{B_R} |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |m|^2)^2 dx + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 \int_{B_R} |m - h|^2 dx, \quad (90)$$

où $h(x) := \frac{x^\perp}{|x|}$ et où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Ce type de modèle intervient en micromagnétisme lorsqu'on impose le champ magnétique extérieur h autour d'un échantillon ferromagnétique sphérique. Plus précisément, on s'intéresse au comportement de cette énergie lorsque le paramètre ε tend vers 0. On a alors la proposition suivante :

Proposition IV.1. *Pour tout ε strictement positif, il existe un minimum global m_ε de E_ε dans $H^1(B_R, \mathbb{R}^2)$. De plus, m_ε vérifie :*

$$\begin{cases} -\Delta m_\varepsilon = \frac{2m_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1 - |m_\varepsilon|^2) - \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 (m_\varepsilon - h) & \text{dans } B_R \\ \nabla m_\varepsilon \cdot n = 0 & \text{sur } \partial B_R \end{cases} \quad (91)$$

où n est la normale extérieure au bord de B_R et pour tout $1 < p < 2$, $m_\varepsilon \in W^{2,p}(B_R, \mathbb{R}^2)$. En particulier, une telle fonction est dans $C^{1,\alpha}$ pour tout α dans $]0, 1[$.

Démonstration. Fixons ε et prenons une suite minimisante $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors,

$$\lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 \int_{B_R} |m_n - h|^2 + \int_{B_R} |\nabla m_n|^2 \leq E_\varepsilon(m_n) \leq C$$

$(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(B_R, \mathbb{R}^2)$. Quitte à extraire une sous-suite, il existe \tilde{m} dans $H^1(B_R, \mathbb{R}^2)$ tel que :

$$\begin{aligned} m_n &\rightharpoonup_{n \rightarrow +\infty} \tilde{m} && \text{dans } H^1(B_R, \mathbb{R}^2), \\ m_n &\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \tilde{m} && \text{dans } L^2(B_R, \mathbb{R}^2) \text{ et p.p dans } B_R \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$E_\varepsilon(\tilde{m}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E_\varepsilon(m_n) = \inf E_\varepsilon,$$

ce qui donne l'existence du minimiseur.

On obtient l'équation d'Euler-Lagrange associée au minimiseur m_ε de la manière habituelle : pour t dans \mathbb{R} et φ dans $C^\infty(B_R, \mathbb{R}^2)$,

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(m_\varepsilon + t\varphi),$$

c'est-à-dire

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq E_\varepsilon(m_\varepsilon) + 2t \int_{B_R} \nabla m_\varepsilon \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \left(-\frac{2m_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1 - |m_\varepsilon|^2) + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 (m_\varepsilon - h) \right) + o(t^2).$$

Par conséquent, pour tout φ dans $C^\infty(B_R, \mathbb{R}^2)$,

$$\int_{B_R} \nabla m_\varepsilon \cdot \nabla \varphi + \varphi \cdot \left(-\frac{2m_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1 - |m_\varepsilon|^2) + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 (m_\varepsilon - h) \right) = 0$$

ce qui donne l'équation souhaitée. La régularité de m_ε découle d'une méthode de bootstrap classique. Reprenant la première équation dans (91)

$$-\Delta m_\varepsilon = \frac{2m_\varepsilon}{\varepsilon^2}(1 - |m_\varepsilon|^2) - \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 (m_\varepsilon - h).$$

Pour tout $p \in [1, 2]$, $h \in W^{1,p} \subset L^2$ et comme $m_\varepsilon \in H^1 \subset L^q$ pour tout $q \geq 1$, le membre de droite de cette équation est dans L^2 . Par régularité elliptique, on en déduit que $m_\varepsilon \in W^{2,2}$. Or d'après les injections de Sobolev, d'une part $W^{2,2} \subset L^\infty$ et d'autre part $W^{2,2} \subset W^{1,p}$ pour tout $p \geq 1$. Par conséquent $m_\varepsilon(1 - |m_\varepsilon|^2) \in W^{1,p}$ pour tout $p \geq 1$. Réutilisant la régularité elliptique, on en déduit que $m_\varepsilon \in W^{3,p}$ pour tout $1 \leq p < 2$. On déduit la régularité de m_ε par injection de $W^{3,p}$ dans $C^{1,\alpha}$, ce qui prouve la proposition. \square

Avant d'énoncer le théorème principal de cette partie, expliquons un peu quel comportement asymptotique nous attendons pour notre énergie minimale E_ε . Tout d'abord, si ε est petit, $|\ln \varepsilon| \gg 1$ donc $m_\varepsilon \approx h$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est le paramètre λ qui va déterminer de quelle façon m_ε approche h .

Si λ est grand, le modèle est similaire à un modèle de Ginzburg-Landau classique

$$E_\varepsilon(m) \approx \int_{B_R} |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |m|^2)^2 dx$$

avec $m = h$ sur ∂B_R . Dans ce modèle, on sait que l'énergie minimale est d'ordre $2\pi|d \ln \varepsilon|$ où d est le degré topologique de la condition au bord (on renvoie par exemple à [6] ou à [28]). Comme h est de degré 1, on s'attend donc ici à ce que $\inf E_\varepsilon = 2\pi|\ln \varepsilon| + o(1)$. On sait de plus qu'une régularisation du champ h d'énergie minimale est un coeur de type Ginzburg-Landau sur lequel on est de degré nul complété par h en dehors du coeur.

Si λ est petit par contre, on s'attend à ce qu'une configuration optimale reste de norme 1 et de degré nul pour minimiser la première partie de l'énergie. On aurait alors :

$$E_\varepsilon(m) \approx \lambda |\ln \varepsilon| \left[\frac{1}{\lambda |\ln \varepsilon|} \int_{B_R} |\nabla \varphi|^2 + \lambda |\ln \varepsilon| \int_{B_R} |e^{i\varphi} - h|^2 dx \right]$$

où φ est un relèvement de m . C'est une énergie de type Modica-Mortola ; un modèle semblable est étudié par Poliakovsky dans [32]. Dans ce cas, on sait qu'une configuration minimisante va avoir une ligne de saut le long de laquelle la phase va varier rapidement pour être de degré nul sur tous les cercles $\mathcal{C}_r := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$ de la boule tout en restant proche de h qui est lui de degré 1. C'est cette ligne de saut, de longueur R pour notre boule B_R qui concentre l'énergie et on s'attend donc à un comportement de la forme $\inf E_\varepsilon \approx CR|\ln \varepsilon|$, où C est une constante. Une régularisation du champ h est alors un champ restant à valeur dans \mathbb{S}^1 et dont la phase varie rapidement suivant un rayon de la boule B_R .

Nous allons voir que c'est bien ce qui se produit et c'est le théorème suivant, qui sera le centre de cette partie.

Théorème IV.2.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \inf E_\varepsilon = 16\lambda R \quad \text{si } 0 < \lambda < \frac{\pi}{8R},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \inf E_\varepsilon = 2\pi \quad \text{si } \lambda \geq \frac{\pi}{8R}.$$

Avant de poursuivre, introduisons quelques notations. On notera

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(m) &:= |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |m|^2)^2, \\ e_\varepsilon(m) &:= g_\varepsilon(m) + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 |m - h|^2. \end{aligned}$$

Pour $\Omega \subset D_R$, on notera encore

$$E_\varepsilon(m, \Omega) := \int_{\Omega} e_\varepsilon(m) \, dx.$$

Avant de passer à la preuve du théorème IV.2 à proprement parler, détaillons brièvement la stratégie de la preuve.

Pour la borne supérieure, nous allons construire deux suites de fonctions $(m_\varepsilon^0)_{\varepsilon > 0}$ et $(m_\varepsilon^1)_{\varepsilon > 0}$ telles que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon^0) = 16\lambda R, \quad (92)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon^1) = 2\pi. \quad (93)$$

L'idée de ces constructions repose sur les observations faites précédemment : si le paramètre λ est grand, l'énergie E_ε va presque se comporter comme une énergie de Ginzburg-Landau classique avec condition de bord. On sait que dans ce cas, une configuration minimisante s'obtient avec un noyau de vortex de rayon ε sur lequel on n'est pas de norme 1 complété par h en dehors du noyau. Nous allons voir que cette construction donne bien l'énergie optimale dans ce cas et c'est l'objet de la section 24.

Lorsque le paramètre λ est petit par contre, nous avons dit qu'il serait moins coûteux de rester de norme 1 et de degré nul et que l'énergie va se concentrer le long d'une ligne où la phase va varier rapidement. Pour déterminer quel est le profil optimal le long d'un rayon en restant de degré nul, nous allons étudier une énergie $1d$: c'est l'objet de la section suivante. Nous en déduirons la construction d'une configuration minimisante pour E_ε dans la section 23.

Pour la borne inférieure, plus délicate, l'argument est essentiellement le suivant : on étudie notre énergie sur chacun des cercles centrés en 0 et inclu dans B_R . S'il existe un cercle sur lequel on est de degré 1, un argument tiré de Jerrard [27] assure que la boule B_R doit contenir un vortex, ce qui coûte $2\pi|\ln \varepsilon|$ en énergie. Sinon, c'est qu'on est de degré nul sur tous les cercles et l'étude de l'énergie $1d$ mentionnée précédemment nous donne une bonne borne inférieure sur chacun des cercles, qu'on intègre pour obtenir une borne inférieure sur E_ε . Bien sûr, la démonstration précise nécessite quelques précautions : pour pouvoir parler de degré du champ sur un cercle on doit par exemple commencer par dire que l'on peut se contenter de regarder les cercles sur lesquels le champ ne s'annule pas. On renvoie à la section 25 pour les détails.

22 Étude d'une énergie 1d

On a dit précédemment qu'on s'attend à ce que le degré de m controle le comportement asymptotique de l'énergie. Si λ est assez petit, on s'attend à favoriser les configurations de degré nul. Pour obtenir une bonne majoration dans le cas où λ est petit, on va donc étudier l'énergie E_ε le long des cercles en supposant m de degré nul. Pour cela, réécrivons

$$E_\varepsilon(m) = \int_0^R \int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m) d\mathcal{H}^1 dr.$$

Nous allons étudier la quantité :

$$\int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m)$$

en supposant m de norme 1 et de degré nul. Pour cela, écrivons $m = e^{i\varphi(\theta)}$ où φ est un relèvement 2π -périodique puisque m est de degré nul. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\partial_\theta \varphi)^2}{r^2} + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 |e^{i\varphi} - ie^{i\theta}|^2 r d\theta \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'^2 + 2s_\varepsilon^2 \left(1 - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) d\theta \end{aligned}$$

où $s_\varepsilon := \lambda |\ln \varepsilon| r$. Posons $\psi := \theta - \frac{\pi}{2} - \varphi$; on va étudier :

$$F_\varepsilon(r, \psi) := \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \psi')^2 + 2s_\varepsilon^2 (1 + \cos \psi) d\theta.$$

$F_\varepsilon(r, \psi)$ représente l'énergie le long d'un cercle en degré nul où $|m| = 1$. Comme on a supposé φ périodique, $\psi(\pi) - \psi(-\pi) = 2\pi$. L'énergie F_ε peut alors se réécrire :

$$F_\varepsilon(r, \psi) = \frac{1}{r} [2\pi - 2(\psi(\pi) - \psi(-\pi))] + \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \psi'^2 + 2s_\varepsilon^2 (1 + \cos \psi) d\theta.$$

En posant $u(\theta) := \psi\left(\frac{\theta}{s_\varepsilon}\right)$, l'égalité précédente se réécrit encore :

$$F_\varepsilon(r, u) = -\frac{2\pi}{r} + \frac{s_\varepsilon}{r} \int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u'^2 + 2(1 + \cos u) dt$$

où $u(\pm\pi s_\varepsilon) = \pm\pi$.

Fixons $r > 0$. Comme $s_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$, il est naturel de s'intéresser à la fonctionnelle suivante :

$$\tilde{F}(v) := \int_{\mathbb{R}} v'^2 + 2(1 + \cos v) dt \tag{94}$$

avec les conditions aux limites $v(\pm\infty) = \pm\pi$ et $v(0) = 0$.

Théorème IV.3. *La fonctionnelle \tilde{F} admet un unique point critique \tilde{v} qui est le minimiseur global de \tilde{F} sur $A := \left\{ v \in \dot{H}^1(\mathbb{R}) : v(\pm\infty) = \pm\pi \text{ et } v(0) = 0 \right\}$. De plus,*

$$\tilde{v}(t) = 4 \arctan \left(\tanh \frac{t}{2} \right) \quad (95)$$

et l'énergie minimale vaut :

$$\inf \tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{v}) = 16.$$

Démonstration. On va montrer que \tilde{F} atteint son infimum sur l'ensemble $\left\{ v \in \dot{H}^1(\mathbb{R}) : v(\pm\infty) = \pm\pi \right\}$ et que si on impose de plus $v(0) = 0$, cet infimum est atteint en un unique point. Le fait que \tilde{F} atteint son infimum sur A se déduit du lemme 1 de [15]. Pour en déduire que cet infimum est atteint en un unique point, on va utiliser l'équation différentielle associée à un minimiseur. Si v est un minimiseur de \tilde{F} , pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et tout s dans \mathbb{R} ,

$$\tilde{F}(v) \leq \tilde{F}(v + s\varphi)$$

I.e.

$$\tilde{F}(v + s\varphi) = \tilde{F}(v) + 2s \int_{\mathbb{R}} \varphi' v' - \varphi \sin v \, dt + O(s^2).$$

Par conséquent, pour tout φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi' v' - \varphi \sin v \, dt = 0.$$

La théorie de la régularité elliptique standard (on renvoie par exemple à [17]) nous dit que v est alors une fonction dans $C^\infty(\mathbb{R})$ et que l'équation précédente est vérifiée au sens fort. Un point critique de \tilde{F} sur A vérifie donc :

$$\begin{cases} v'' = -\sin v, \\ v(\pm\infty) = \pm\pi, \\ v(0) = 0. \end{cases} \quad (96)$$

On reconnaît la version stationnaire de l'équation elliptique de sine-Gordon. Nous allons prouver que ce système admet une unique solution \tilde{v} et que

$$\tilde{v}(t) = 4 \arctan \left(\tanh \frac{t}{2} \right).$$

Pour cela, on va regarder l'équation différentielle dans l'espace des phases en introduisant la fonction $V = (v, v')$ et le champ :

$$\begin{aligned} X: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, p) &\longmapsto (p, -\sin x). \end{aligned}$$

Si v vérifie le système (96), multipliant la première équation par $2v'$ et intégrant, on obtient qu'il existe une constante Q dans \mathbb{R} telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}(v')^2 - \cos v = Q. \quad (97)$$

Comme $v(\pm\infty)$ existe, passant à la limite en t , on en déduit qu'il existe l_1 et l_2 dans \mathbb{R} tels que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v'(t) = l_1 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} v'(t) = l_2.$$

V est solution globale de l'équation différentielle $V' = X(V)$ et est à valeur dans un compact ; il ne peut donc converger que vers un point critique du champ X , c'est à dire un point tel que $X(x, p) = (0, 0)$, ce qui impose $l_1 = l_2 = 0$. Reportant dans la relation (97), on en déduit que $Q = 1$. Une solution V de notre équation (96) est donc incluse dans l'ensemble :

$$H := \left\{ (x, p) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}p^2 - \cos x = 1 \right\},$$

qu'on peut encore écrire comme la réunion disjointe :

$$\begin{aligned} H = & \{(\pi + 2k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \underbrace{\left\{ (x, p) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[: \frac{1}{2}p^2 - \cos x = 1 \right\}}_{:=H^+} \\ & \cup \underbrace{\left\{ (x, p) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[: \frac{1}{2}p^2 - \cos x = 1 \right\}}_{:=H^-}. \end{aligned}$$

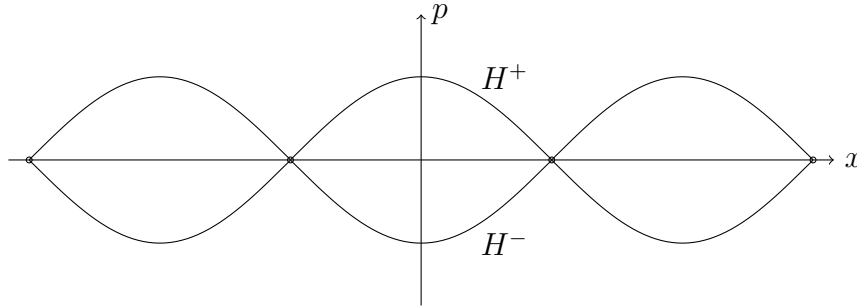


FIGURE 11 – L'ensemble H

Il est clair que les trajectoires constantes $(\pi + 2k\pi, 0)$ pour k dans \mathbb{Z} sont solutions de $V' = X(V)$. Comme d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, deux trajectoires distinctes ne peuvent s'intersecter, une solution V de (96) est soit incluse dans H^+ , soit incluse dans H^- . Si elle est incluse dans H^- , v' est négative dans v est décroissante et elle ne peut vérifier $v(\pm\infty) = \pm\pi$. Une solution v de (96) est donc incluse dans H^+ , pour tout t dans \mathbb{R} , $v'(t) > 0$ et c'est un difféomorphisme croissant. Intégrant (97),

$$\int_0^t \frac{v'}{\sqrt{2(1 + \cos v)}} ds = t,$$

ou encore, en changeant de variable,

$$\int_0^{v(t)} \frac{ds}{\sqrt{2(1 + \cos s)}} = t.$$

Une primitive de la fonction $s \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos s)}}$ est la fonction $s \mapsto 2 \operatorname{arctanh}(\tan \frac{s}{4})$ et finalement, il existe donc une unique solution \tilde{v} à (96) :

$$\tilde{v}(t) = 4 \arctan \left(\tanh \frac{t}{2} \right).$$

L'énergie minimale vaut alors :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{v}) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}'^2 + 2(1 + \cos \tilde{v}) \, dt = 2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}' \sqrt{2(1 + \cos \tilde{v})} \, dt \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos t)} \, dt = 8 \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} \, dt = 16. \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Corollaire IV.4. *Soit $\delta > 0$. Il existe ε' tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon'$ et pour tout fonction u vérifiant $u(\pm s_\varepsilon \pi) = \pm \pi$,*

$$\int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u'^2 + 2(1 + \cos u) \, dt \geq 16 + \delta$$

Démonstration. Soit δ fixé. On prend $\varepsilon < \varepsilon'$ tel que

$$\left| \int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u'^2 + 2(1 + \cos u) \, dt - \int_{\mathbb{R}} u'^2 + 2(1 + \cos u) \, dt \right| \leq \delta$$

de sorte que :

$$\int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u'^2 + 2(1 + \cos u) \, dt \geq \inf \left\{ \tilde{F}(u) \mid u \in \dot{H}(\mathbb{R}) \quad u(\pm\infty) = \pm\pi \right\} + \delta$$

Or la fonctionnelle \tilde{F} et l'espace des contraintes $C := \left\{ v \in \dot{H}(\mathbb{R}) : v(\pm\infty) = \pm\pi \right\}$ sont invariants par translation, c'est-à-dire que pour $l \in \mathbb{R}$, si u est dans C , $u(\cdot + l) \in C$ et $\tilde{F}(u) = \tilde{F}(u(\cdot + l))$.

Par conséquent,

$$\inf \left\{ \tilde{F}(u) \mid v \in \dot{H}(\mathbb{R}) \quad u(\pm\infty) = \pm\pi \right\} = \inf \left\{ \tilde{F}(u) \mid v \in \dot{H}(\mathbb{R}) \quad u(\pm\infty) = \pm\pi \text{ et } u(0) = 0 \right\}$$

$$\int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u'^2 + 2(1 + \cos u) \, dt \geq 16 + \delta$$

et le corollaire est prouvé. \square

23 Borne supérieure en degré 0

Comme annoncé, on a la proposition suivante :

Proposition IV.5. *Il existe une famille $(m_\varepsilon^0)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de $H^1(B_R, \mathbb{R}^2)$ telle que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon^0) = 16\lambda R.$$

Démonstration. Cett construction suit des idées développées par Ignat et Knüpfer dans [20]. Pour $\gamma > 0$, notons $h(t) := \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ et considérons le profil défini pour $\theta \in [-\pi, \pi[$:

$$u(\gamma, \theta) := \begin{cases} \tilde{v}\left(\frac{2\gamma s_\varepsilon}{\pi}h\left(\frac{\theta}{\gamma}\right)\right) & \text{si } |\theta| \leq \gamma, \\ \pi & \text{si } \theta \geq \gamma, \\ -\pi & \text{si } \theta \leq -\gamma. \end{cases} \quad (98)$$

Soit $p \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $k_\varepsilon := |\ln \varepsilon|^{-p}$. On pose $\gamma(r) := \arcsin \frac{k_\varepsilon}{2r}$ et on découpe le disque B_R en trois zones A_1 , A_2 et A_3 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{(r, \theta) \in [0, R[\times [-\pi, \pi[: k_\varepsilon \leq r \leq R \text{ et } |\theta| > \gamma_r\}, \\ A_2 &:= \{(r, \theta) \in [0, R[\times [-\pi, \pi[: k_\varepsilon \leq r \leq R \text{ et } |\theta| \leq \gamma_r\}, \\ A_3 &:= \{(r, \theta) \in [0, R[\times [-\pi, \pi[: r < k_\varepsilon\}. \end{aligned}$$

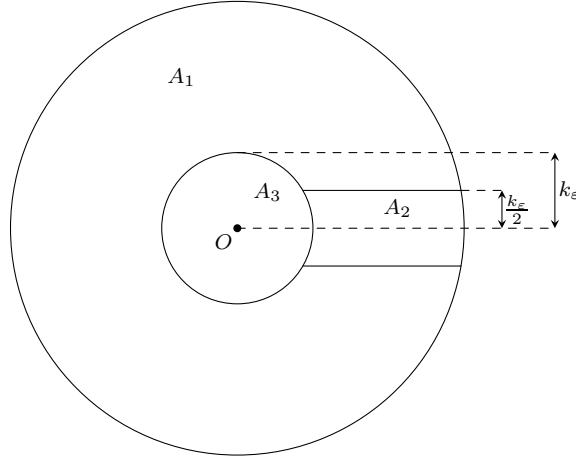


FIGURE 12 – Partage de B_R en trois domaines A_1 , A_2 et A_3

Posons :

$$\varphi(r, \theta) := \begin{cases} \theta + \frac{3\pi}{2} - u(\gamma_r, \theta) & \text{sur } A_1 \cup A_2, \\ \frac{r}{k_\varepsilon} \varphi(k_\varepsilon, \theta) & \text{sur } A_3, \end{cases}$$

et

$$m_\varepsilon^0(r, \theta) := e^{i\varphi(r, \theta)}.$$

Remarquons qu'avec cette construction, sur A_1

$$m_\varepsilon^0(r, \theta) = e^{i(\theta + \frac{3\pi}{2} \pm \pi)} = h.$$

m_ε^0 est construit de manière à ce que sur chacun des rayons de $A_1 \cup A_2$ tende vers l'énergie optimale en degré nul. Suite à l'analyse faite de l'énergie un dimensionnelle, on s'attend à ce que toute l'énergie provienne de la bande A_2 dans laquelle la phase tourne rapidement pour que m_ε^1 soit de degré nul. Prouvons que c'est effectivement le cas.

Dans ce qui suit, C désignera une constante changeant éventuellement d'une ligne à l'autre et dépendant éventuellement de R et λ mais *pas* de ε .

23.0.1 Énergie sur A_1

Sur A_1 , $m_\varepsilon^0 = h$. La seule énergie provient du terme en gradient et :

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(m_\varepsilon^0, A_1) &= \int_{A_1} |\nabla m_\varepsilon^0|^2 dx \leq \int_{A_1 \cup A_2} |\nabla h|^2 dx \\ &\leq 2\pi (\ln R - \ln k_\varepsilon) \leq C + C |\ln k_\varepsilon|. \end{aligned}$$

On obtient comme borne de l'énergie sur A_1

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon^0, A_1) \leq C + C |\ln k_\varepsilon| = o(|\ln \varepsilon|). \quad (99)$$

23.0.2 Énergie sur A_3

On va d'abord majorer $|\nabla m_\varepsilon^0|^2$ sur A_3 :

$$|\nabla m_\varepsilon^0|^2 = \frac{(\partial_\theta \varphi)^2}{r^2} + (\partial_r \varphi)^2 \leq \frac{1}{k_\varepsilon^2} ((\partial_\theta \varphi(k_\varepsilon, \theta))^2 + \varphi(k_\varepsilon, \theta)^2).$$

Or $|\varphi(k_\varepsilon, \theta)| \leq \|\varphi\|_\infty \leq 2\pi$ et sur $A_3 \cap \{|\theta| \geq \gamma_k\}$, $|\partial_\theta \varphi(k_\varepsilon, \theta)| \leq 1$ de sorte que :

$$\int_{A_3 \cap \{|\theta| \geq \gamma_k\}} |\nabla m_\varepsilon^0|^2 \leq \frac{C}{k_\varepsilon^2} |A_3| \leq C. \quad (100)$$

Sur $A_3 \cap \{|\theta| < \gamma_k\}$,

$$|\partial_\theta \varphi(k_\varepsilon, \theta)|^2 = |1 - \partial_\theta u(\gamma_k, \theta)|^2 \leq 2 + 2 \left[s_\varepsilon h'(\theta/\gamma_k) \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_k) \right) \right]^2$$

et

$$\int_{A_3 \cap \{|\theta| > \gamma_k\}} |\nabla m_\varepsilon^0|^2 dx \leq \frac{C}{k_\varepsilon^2} |A_3| + \frac{C}{k_\varepsilon^2} \int_0^{k_\varepsilon} r \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} \left[s_\varepsilon h'(\theta/\gamma_k) \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_k) \right) \right]^2 d\theta dr. \quad (101)$$

Montrons que

$$\frac{1}{k_\varepsilon^2} \int_0^{k_\varepsilon} r \underbrace{\int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} \left[s_\varepsilon h'(\theta/\gamma_k) \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_k) \right) \right]^2 d\theta}_{=: I} dr \leq C |\ln \varepsilon| k_\varepsilon,$$

ce qui conclura. Commençons par montrer une borne sur I . Pour cela, posons $t := h(\frac{\theta}{\gamma_k})$. Alors,

$$I = s_\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} h'(h^{-1}(t))^2 \tilde{v}'^2 \left(\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} t \right) \frac{\gamma_k dt}{h'(h^{-1}(t))} = s_\varepsilon^2 \gamma_k \int_{-\infty}^{\infty} h'(h^{-1}(t)) \tilde{v}'^2 \left(\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} t \right) dt.$$

Or d'une part, comme $h(t) = \tan(\frac{\pi}{2}t)$,

$$h'(h^{-1}(t)) = \frac{\pi}{2}(1+t^2). \quad (102)$$

D'autre part, comme $\tilde{v}(t) = 4 \arctan(\tanh \frac{t}{2})$,

$$\tilde{v}'(t) = 2 \frac{1 - \tanh^2 t/2}{1 + \tanh^2 t/2} \leq 2 \frac{1}{\cosh^2 t/2} \leq 4e^{-|t|/2} \quad (103)$$

donc

$$I \leq C s_\varepsilon^2 \int_0^\infty (1+t^2) e^{-\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} t} dt \leq C s_\varepsilon$$

et finalement, comme $s_\varepsilon = \lambda |\ln \varepsilon| r$,

$$\frac{1}{k_\varepsilon^2} \int_0^{k_\varepsilon} r \int_{-\gamma_k}^{\gamma_k} \left[s_\varepsilon h'(\theta/\gamma_k) \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_k s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_k) \right) \right]^2 d\theta dr \leq C \frac{|\ln \varepsilon|}{k_\varepsilon^2} \int_0^{k_\varepsilon} r^2 dr \leq C |\ln \varepsilon| k_\varepsilon. \quad (104)$$

Combinant (100) (101) et (104), on obtient :

$$\int_{A_3} |\nabla m_\varepsilon^0|^2 dx \leq C + C |\ln \varepsilon| k_\varepsilon. \quad (105)$$

Comme d'autre part

$$\lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 \int_{A_3} |m_\varepsilon^0 - h|^2 dx \leq C |\ln \varepsilon|^2 |A_3| \leq C |\ln \varepsilon|^2 k_\varepsilon^2, \quad (106)$$

on obtient comme borne de l'énergie sur A_3 en sommant (105) et (106)

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon^0, A_3) \leq C + C |\ln \varepsilon| k_\varepsilon + C |\ln \varepsilon|^2 k_\varepsilon^2 = o(|\ln \varepsilon|). \quad (107)$$

Remarquons que c'est le seul endroit de la preuve où l'on utilisera le fait que $p > \frac{1}{2}$. En effet, avoir $|\ln \varepsilon|^2 k_\varepsilon^2 = |\ln \varepsilon|^2 |\ln \varepsilon|^{-2p} = o(|\ln \varepsilon|)$ impose $1 - 2p < 0$.

23.0.3 Énergie sur A_2

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(m_\varepsilon^0, A_2) &= \int_{A_2} |\nabla m_\varepsilon^0|^2 dx + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 \int_{A_2} |m_\varepsilon^0 - h|^2 dx \\ &= \underbrace{\int_{A_2} (\partial_r \varphi)^2 dx}_{:=I_1} + \underbrace{\int_{A_2} \frac{(\partial_\theta \varphi)^2}{r^2} + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 |m_\varepsilon^0 - h|^2 dx}_{:=I_2}. \end{aligned}$$

Montrons que la première intégrale est négligeable. Sur A_2 ,

$$\partial_r \varphi(r, \theta) = \left[\frac{2s_\varepsilon \gamma_r'}{\pi} h(\theta/\gamma_r) - \frac{2s_\varepsilon \theta \gamma_r'}{\pi \gamma_r} h'(\theta/\gamma_r) \right] \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_r s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_r) \right)$$

et

$$I_1 = \int_{k_\varepsilon}^R r \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \left(\left[\frac{2s_\varepsilon \gamma_r'}{\pi} h(\theta/\gamma_r) - \frac{2s_\varepsilon \theta \gamma_r'}{\pi \gamma_r} h'(\theta/\gamma_r) \right] \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_r s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_r) \right) \right)^2 d\theta dr.$$

Changeant de variable en posant $t := \frac{2\gamma_r s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_r)$ dans la seconde intégrale et utilisant $h'(h^{-1}(t)) = \frac{\pi}{2}(1+t^2)$, il vient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{k_\varepsilon}^R r \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[\frac{t\gamma_r'}{\gamma_r} - \frac{2s_\varepsilon \gamma_r'}{\pi} h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon) h'(h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon)) \right] \tilde{v}'(t) \right)^2 \times \\ &\quad \frac{dt}{2h'(h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon))} dr \\ &= \int_{k_\varepsilon}^R r \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[\frac{t\gamma_r'}{\gamma_r} - s_\varepsilon \gamma_r' h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon) \left(1 + \left(\frac{t\pi}{2\gamma_r s_\varepsilon} \right)^2 \right) \right] \tilde{v}'(t) \right)^2 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t\pi}{2\gamma_r s_\varepsilon} \right)^2} dr. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant écrire quelques inégalités qui vont nous permettre de majorer commodément I_1 :

Comme $\gamma_r = \arcsin \frac{k_\varepsilon}{2r}$,

$$C \frac{k_\varepsilon}{r} \leq \gamma_r \leq \frac{k_\varepsilon}{r} \quad \text{et} \quad |\gamma_r'| = \frac{k_\varepsilon}{2r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_\varepsilon}{2r} \right)^2}} \leq \frac{Ck_\varepsilon}{r^2}.$$

Par conséquent, $\gamma_r s_\varepsilon = \arcsin \left(\frac{k_\varepsilon}{2r} \right) r \lambda |\ln \varepsilon| \geq Ck_\varepsilon |\ln \varepsilon|$ et comme $|h^{-1}(t)| = \frac{2}{\pi} |\arctan t| \leq C|t|$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int_{k_\varepsilon}^R r \int_0^\infty \left[\left(\frac{t\gamma_r'}{\gamma_r} \right)^2 + s_\varepsilon^2 \gamma_r'^2 \frac{t^2}{k_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^2} \left(1 + C \frac{t^2}{k_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^2} \right)^2 \right] \tilde{v}'^2(t) dt dr \\ &\leq C \int_{k_\varepsilon}^R r \int_0^\infty \left[C \frac{t^2}{r^2} + C \frac{t^2}{r^2} \left(1 + C \frac{t^2}{k_\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|^2} \right)^2 \right] \tilde{v}'^2(t) dt dr. \end{aligned}$$

Comme $k_\varepsilon |\ln \varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$ si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on obtient donc

$$I_1 \leq C \int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} dr \int_0^\infty (t^2 + t^4 + t^6) \tilde{v}'(t) dt.$$

Cette dernière intégrale converge, par exemple à cause de la majoration (103) et finalement,

$$I_1 \leq C + C|\ln k_\varepsilon| = o(|\ln \varepsilon|). \quad (108)$$

La seconde intégrale I_2 vaut quant à elle

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} (1 - \partial_\theta [u(\gamma_r, \theta)])^2 + 2s_\varepsilon^2(1 + \cos u(\gamma_r, \theta)) d\theta dr \\ &= \underbrace{\int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} (1 - 2\partial_\theta [u(\gamma_r, \theta)]) d\theta dr}_{=: I_2^1} + \\ &\quad \underbrace{\int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \partial_\theta [u(\gamma_r, \theta)]^2 + 2s_\varepsilon^2(1 + \cos u(\gamma_r, \theta)) d\theta dr}_{=: I_2^2}. \end{aligned}$$

$$I_2^1 = \int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} \left(2\gamma_r - 2[u(\gamma_r, \theta)]_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \right) dr = 2 \int_{k_\varepsilon}^R \frac{\gamma_r - 2\pi}{r} dr.$$

Comme $\gamma_r = \arcsin\left(\frac{k}{2r}\right) \leq \frac{\pi}{2} \frac{k_\varepsilon}{2r}$,

$$I_2^1 \leq C \int_{k_\varepsilon}^R \frac{k_\varepsilon}{r^2} dr + C \int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} dr \leq C + C|\ln k_\varepsilon| = o(|\ln \varepsilon|). \quad (109)$$

Il ne reste plus qu'à étudier I_2^2 . Comme

$$\partial_\theta [u(\gamma_r, \theta)] = \frac{2s_\varepsilon}{\pi} h'(\theta/\gamma_r) \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_r s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_r) \right),$$

$$I_2^2 = \int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} \int_{-\gamma_r}^{\gamma_r} \left[\frac{2s_\varepsilon}{\pi} h'(\theta/\gamma_r) \tilde{v}' \left(\frac{2\gamma_r s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_r) \right) \right]^2 + 2s_\varepsilon^2(1 + \cos u(\gamma_r, \theta)) d\theta dr.$$

Posons $t = \frac{2\gamma_r s_\varepsilon}{\pi} h(\theta/\gamma_r)$ dans I_2^2 :

$$\begin{aligned} I_2^2 &= \int_{k_\varepsilon}^R \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left[\frac{2s_\varepsilon}{\pi} h'(h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon)) \tilde{v}'(t) \right]^2 + 2s_\varepsilon^2(1 + \cos \tilde{v}(t)) \right] \times \\ &\quad \frac{\pi}{2s_\varepsilon h'(h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon))} dt dr \\ &= \int_{k_\varepsilon}^R \frac{s_\varepsilon}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left[\frac{2}{\pi} h'(h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon)) \tilde{v}'(t) \right]^2 + 2(1 + \cos \tilde{v}(t)) \right] \times \\ &\quad \frac{\pi}{2h'(h^{-1}(t\pi/2\gamma_r s_\varepsilon))} dt dr. \end{aligned}$$

Or $s_\varepsilon = \lambda |\ln \varepsilon| r$ et en réutilisant le fait que $h'(h^{-1}(t)) = \frac{\pi}{2}(1+t^2)$, on obtient

$$\frac{I_2^2}{|\ln \varepsilon|} = \lambda \int_{k_\varepsilon}^R \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(1 + \left(\frac{t\pi}{2\gamma_r s_\varepsilon} \right)^2 \right)^2 \tilde{v}^2(t) + 2(1 + \cos \tilde{v}(t)) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{t\pi}{2\gamma_r s_\varepsilon} \right)^2} dt dr.$$

Notons

$$(r, t) \xrightarrow{g_\varepsilon} \left[\left(1 + \left(\frac{t\pi}{2\gamma_r s_\varepsilon} \right)^2 \right)^2 \tilde{v}'^2(t) + 2(1 + \cos \tilde{v}(t)) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{t\pi}{2\gamma_r s_\varepsilon} \right)^2} 1_{[k_\varepsilon, R]}(r).$$

Comme $k_\varepsilon = |\ln \varepsilon|^{-p} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ et $\gamma_r s_\varepsilon = \arcsin \frac{k_\varepsilon}{2r} \lambda |\ln \varepsilon| r \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$ pour tout $(r, t) \in]0, R] \times]-\infty, +\infty[$,

$$g_\varepsilon(r, t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} [\tilde{v}'^2(t) + 2(1 + \cos \tilde{v}(t))] 1_{[0, R]}(r).$$

D'autre part, pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$\forall (r, t) \in [0, R] \times]-\infty, +\infty[\quad |g_\varepsilon(r, t)| \leq (1 + Ct^2)^2 \tilde{v}'^2(t) + 2(1 + \cos \tilde{v}(t))$$

et cette dernière fonction est dans $L^1([0, R] \times]-\infty, +\infty[)$ par exemple grâce à l'inégalité :

$$(1 + Ct^2)^2 \tilde{v}'^2(t) + 2(1 + \cos \tilde{v}(t)) \leq \max \{2C, C^2\} (t^2 + t^4) \tilde{v}'^2(t) + \tilde{v}'^2(t) + 2(1 + \cos \tilde{v}(t)).$$

Par convergence dominée, on obtient donc :

$$\frac{1}{|\ln \varepsilon|} I_2^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda \int_0^R \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}'^2 + 2(1 + \cos \tilde{v}) dt dr = 16\lambda R. \quad (110)$$

Réunissant finalement les inégalités obtenues en (99), (107), (108) et (109) à la limite que l'on vient de calculer en (110), on obtient enfin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon^0) = 16\lambda R.$$

c'est à dire (92). □

24 Borne supérieure en degré 1

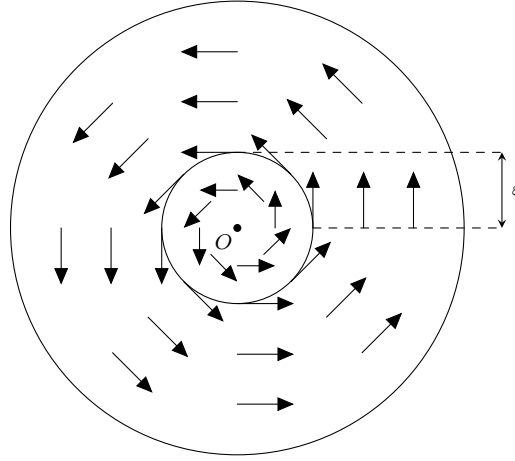
Le but est maintenant de construire une suite de fonctions $(m_\varepsilon^1)_{\varepsilon > 0}$ vérifiant (93). On cherche une configuration asymptotiquement proche de l'énergie optimale et de degré 1 sur les rayons du disque. Dans ce cas, la construction classique qui donne une bonne borne pour l'énergie de Ginzburg-Landau fonctionne également ici et on a la proposition suivante :

Proposition IV.6. *Il existe une famille $(m_\varepsilon^1)_{\varepsilon > 0}$ de fonctions de $H^1(B_R, \mathbb{R}^2)$ telle que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon^1) = 2\pi.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et introduisons la fonction m_ε^1 définie en coordonnées polaires par :

$$m_\varepsilon^1(r, \theta) = \begin{cases} ie^{i\theta} & \text{si } \varepsilon \leq r < R, \\ \frac{r}{\varepsilon} ie^{i\theta} & \text{si } r < \varepsilon. \end{cases}$$

FIGURE 13 – Le champ m_ε^1

Alors,

$$\begin{aligned}
 E_\varepsilon(m_\varepsilon^1) &= 2\pi \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} |\partial_\theta m_\varepsilon^1|^2 dr + 2\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{r} |\partial_\theta m_\varepsilon^1|^2 dr + \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon^2}\right)^2 r dr + \\
 &\quad \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 2\pi \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{r}{\varepsilon}\right)^2 r dr \\
 &= 2\pi \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} dr + 2\pi \int_0^\varepsilon \frac{1}{r} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2 dr + \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \int_0^\varepsilon r - \frac{2r^3}{\varepsilon^2} + \frac{r^5}{\varepsilon^4} dr + \\
 &\quad \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 2\pi \int_0^\varepsilon r - \frac{2r^2}{\varepsilon} + \frac{r^3}{\varepsilon^2} dr \\
 &= 2\pi |\ln \varepsilon| + 2\pi \ln R + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \varepsilon^2 \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 \\
 &= 2\pi |\ln \varepsilon| + o(|\ln \varepsilon|).
 \end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition.

25 Borne inférieure

Lemme IV.7. Soit $(m_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite minimisante de E_ε . Alors, on a :

$$\begin{aligned}
 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon) &\geq 16\lambda R \quad \text{si } 0 < \lambda < \frac{\pi}{8R}, \\
 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon) &\geq 2\pi \quad \text{si } \lambda \geq \frac{\pi}{8R}.
 \end{aligned}$$

Pour cela nous allons utiliser le théorème suivant dû à Jerrard et que l'on peut trouver dans [27].

Théorème IV.8. (Jerrard, [27]). Soit $C > 0$ et $R > 0$. Il existe $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(C, R)$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, si $m : B_R \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfait les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} |m| &\geq \frac{1}{2} \text{ sur } \{x \in B_R : \text{dist}(x, \partial B_R) \leq r^*(\varepsilon)\} \quad \text{où } r^* \in \left] \frac{1}{|\ln \varepsilon|^3}, R \right[, \\ |deg(m, \partial B_R)| &> 0, \\ \int_{B_R} g_\varepsilon(m) dx &\leq 2\pi |\ln \varepsilon| + C. \end{aligned}$$

Alors, il existe $x^* \in B_R$ et $\tilde{C} := \tilde{C}(C, R) > 0$ tels que $B(x^*, r^*) \subset B_R$ et :

$$2\pi \left| \ln \frac{r^*}{\varepsilon} \right| - \tilde{C} \leq \int_{B(x^*, r^*)} g_\varepsilon(m) dx.$$

Démonstration. du lemme IV.7. Soit $(m_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une suite minimisante. Tout d'abord, on peut supposer qu'il existe ε_1 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$,

$$E_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 2\pi |\ln \varepsilon| \quad (111)$$

sinon, la preuve est terminée. Rappelons que $g_\varepsilon(m) = |\nabla m|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - |m|^2)^2$ et posons :

$$J_1 := \left\{ r \in]0, R[: \int_{\partial B_r} g_\varepsilon(m_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \geq |\ln \varepsilon|^3 \right\}.$$

Alors,

$$\mathcal{H}^1(J_1) \leq 2\pi |\ln \varepsilon|^{-2}. \quad (112)$$

En effet,

$$|\ln \varepsilon|^3 \mathcal{H}^1(J_1) \leq \int_{J_1} dr \int_{\partial B_r} g_\varepsilon(m_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \leq 2\pi |\ln \varepsilon|$$

grâce à l'inégalité (111). Posons maintenant

$$J_2 := J_1^c \cap \left] \frac{1}{|\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}}}, R \right[.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout r dans J_2 et x dans ∂B_r ,

$$1 - |m_\varepsilon(x)| \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}. \quad (113)$$

C'est une conséquence de l'inégalité suivante, qu'on peut par exemple trouver dans [24] et [27]. Notons $\rho_\varepsilon := |m_\varepsilon(x)|$ et $\alpha := \min \{\rho_\varepsilon : x \in \partial B_r\}$.

Alors, il existe $\tilde{C} > 0$ tel que :

$$\frac{\tilde{C}}{\varepsilon} (1 - \alpha^2)^2 \leq \int_{\partial B_r} |\partial_\theta \rho_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \rho_\varepsilon^2)^2 d\mathcal{H}^1 \quad (114)$$

On renvoie au lemme 2.3 de [27] pour la preuve de (114). Montrons qu'on en déduit l'inégalité (113). Pour r dans J_2 ,

$$\frac{\tilde{C}}{\varepsilon}(1 - \alpha^2)^2 \leq \int_{\partial B_r} |\partial_\theta \rho_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - \rho_\varepsilon^2)^2 d\mathcal{H}^1 \leq \int_{\partial B_r} g_\varepsilon(m_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \leq |\ln \varepsilon|^3$$

Multipliant par $\frac{\varepsilon}{\tilde{C}}$ et prenant la racine, pour x dans ∂B_r ,

$$1 - |m_\varepsilon(x)| \leq 1 - \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{C}}} \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}},$$

ce qui prouve l'inégalité (113). De l'inégalité (113), on déduit en particulier qu'il existe ε_2 tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_2$, $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Pour $\varepsilon < \varepsilon_2$, la norme de m_ε ne s'annule donc pas sur ∂B_r pour r dans J_2 ; on peut donc parler du degré de m_ε sur ∂B_r et définir les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} I_0 &:= \{r \in J_2 : \deg(m_\varepsilon, \partial B_r) = 0\}, \\ I_1 &:= \{r \in J_2 : |\deg(m_\varepsilon, \partial B_r)| > 0\}. \end{aligned}$$

Deux cas de figures sont alors possibles.

— cas 1 : $I_1 \neq \emptyset$. Il existe alors r dans J_2 tel que $|\deg(m_\varepsilon, \partial B_r)| > 0$. Posons $r^* = \frac{1}{|\ln \varepsilon|^3}$. On va étendre le champ de vecteur m_ε en un champ de vecteur \tilde{m}_ε défini sur B_{r+r^*} tel que $\tilde{m}_\varepsilon = m_\varepsilon$ dans B_r et vérifiant

$$\begin{aligned} |\tilde{m}_\varepsilon| &\geq \frac{1}{2} \quad \text{dans } B_{r+r^*} \setminus B_r, \\ |\deg(\tilde{m}_\varepsilon, \partial B_{r+r^*})| &\geq 1, \\ \int_{B_{r+r^*}} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx &\leq 2\pi |\ln \varepsilon| + C. \end{aligned}$$

Pour cela, posons pour $x \in B_{r+r^*} \setminus B_r$

$$\tilde{m}_\varepsilon(x) := m_\varepsilon\left(r \frac{x}{|x|}\right).$$

Comme $r \in J_2$, $|\tilde{m}_\varepsilon| \geq \frac{1}{2}$ sur $B_{r+r^*} \setminus B_r$ et de plus $|\deg(\tilde{m}_\varepsilon, \partial B_{r+r^*})| = |\deg(m_\varepsilon, \partial B_r)| > 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} \int_{B_{r+r^*} \setminus B_r} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx &= \int_r^{r+r^*} \int_{\partial B_r} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 dr \\ &\leq r^* \int_{\partial B_r} g_\varepsilon(m_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \leq r^* |\ln \varepsilon|^3 = 1, \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{B_{r+r^*}} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx &\leq \int_{B_r} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx + \int_{B_{r+r^*} \setminus B_r} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx \\ &\leq E_\varepsilon(m_\varepsilon) + \int_{B_{r+r^*} \setminus B_r} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx \\ &\leq 2\pi |\ln \varepsilon| + 1. \end{aligned}$$

D'après le théorème IV.8, il existe x_1 dans B_r tel que $B(x_1, r) \subset B_{r+r^*}$ et

$$2\pi \left| \ln \frac{r^*}{\varepsilon} \right| - C \leq \int_{B(x_1, r^*)} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx$$

de sorte que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(m_\varepsilon) &\geq \int_{B(x_1, r^*) \cap B_r} g_\varepsilon(m_\varepsilon) dx \\ &\geq \int_{B(x_1, r^*)} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx - \int_{B_{r+r^*} \setminus B_r} g_\varepsilon(\tilde{m}_\varepsilon) dx \\ &\geq 2\pi \left| \ln \frac{r^*}{\varepsilon} \right| - C - 1 \\ &\geq 2\pi |\ln \varepsilon| + o(|\ln \varepsilon|), \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq 2\pi.$$

- cas 2 : $I_1 = \emptyset$. Dans ce cas, $I_0 = J_2$. Notons φ_ε un relèvement de m_ε de sorte que $m_\varepsilon = |m_\varepsilon|e^{i\varphi_\varepsilon}$. Pour r dans I_0 ,

$$\int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq \int_{\partial B_r} |\nabla m_\varepsilon|^2 + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 |m_\varepsilon - h|^2.$$

Or $|\nabla m_\varepsilon|^2 \geq |m_\varepsilon|^2 (\partial_\theta \varphi_\varepsilon)^2$ et réutilisant l'inégalité (113),

$$|\nabla m_\varepsilon|^2 \geq (1 - C\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}) \frac{(\partial_\theta \varphi_\varepsilon)^2}{r^2}. \quad (115)$$

De même,

$$\begin{aligned} |m_\varepsilon - h|^2 &= ||m_\varepsilon|e^{i\varphi_\varepsilon} - h|^2 \\ &= |e^{i\varphi_\varepsilon} - h + (|m_\varepsilon| - 1)e^{i\varphi_\varepsilon}|^2 \\ &\geq |e^{i\varphi_\varepsilon} - h|^2 - C\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (116)$$

Combinant les inégalités (115) et (116),

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m_\varepsilon) &\geq (1 - C\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}) \left[\int_{\partial B_r} \frac{(\partial_\theta \varphi_\varepsilon)^2}{r^2} + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 |e^{i\varphi_\varepsilon} - h|^2 \right] \\ &\quad - C\lambda^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Sur J_2 , on est en degré 0 ; les fonctions φ_ε sont 2π périodiques. Reprenant les calculs fait en,

$$\int_{\partial B_r} \frac{(\partial_\theta \varphi_\varepsilon)^2}{r^2} + \lambda^2 |\ln \varepsilon|^2 |e^{i\varphi_\varepsilon} - h|^2 d\mathcal{H}^1 = -\frac{2\pi}{r} + \lambda |\ln \varepsilon| \int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u_\varepsilon'^2 + 2(1 + \cos u_\varepsilon) dt$$

Intégrant sur J_2 , on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{J_2} \int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m_\varepsilon) &\geq (1 - C\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{3}{2}}) \int_{J_2} \left[-\frac{2\pi}{r} + \lambda |\ln \varepsilon| \int_{-\pi s_\varepsilon}^{\pi s_\varepsilon} u_\varepsilon'^2 + 2(1 + \cos u_\varepsilon) \right] dr \\ &\quad - RC\lambda^2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} |\ln \varepsilon|^{\frac{5}{2}} \mathcal{H}^1(J_2) \end{aligned} \quad (117)$$

Divisons (117) par $|\ln \varepsilon|$ et prenons $\epsilon < \epsilon'$ comme dans le corollaire IV.4. Alors, pour tout $\epsilon < \epsilon'$

$$\int_{-\pi s_\epsilon}^{\pi s_\epsilon} u'_\epsilon{}^2 + 2(1 + \cos u_\epsilon) \geq 16 + \delta$$

D'autre part, comme $r > \frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}$, il est clair que $\int_{J_2} \frac{2\pi}{r} = o(|\ln \varepsilon|)$.

Comme $J_2 = J_1^c \cap \left] \frac{1}{|\ln \varepsilon|^2}, R \right]$ et que par l'inégalité (112), $\mathcal{H}^1(J_1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, on a de plus :

$$\mathcal{H}^1(J_2) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} R.$$

Passant à la limite inférieure lorsque ε tend vers 0, on obtient donc

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} E_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \int_{J_2} \int_{\partial B_r} e_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq \lambda R(16 + \delta),$$

Ceci étant vrai quel que soit δ , on obtient l'inégalité souhaitée en faisant tendre δ vers 0, ce qui conclut la preuve.

□

Références

- [1] Robert A. Adams and John J. F. Fournier. *Sobolev spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second edition, 2003.
- [2] François Alouges, Tristan Rivière, and Sylvia Serfaty. Néel and cross-tie wall energies for planar micromagnetic configurations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 8 :31–68 (electronic), 2002. A tribute to J. L. Lions.
- [3] Luigi Ambrosio, Camillo De Lellis, and Carlo Mantegazza. Line energies for gradient vector fields in the plane. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 9(4) :327–255, 1999.
- [4] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [5] Patricio Aviles and Yoshikazu Giga. On lower semicontinuity of a defect energy obtained by a singular limit of the Ginzburg-Landau type energy for gradient fields. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 129(1) :1–17, 1999.
- [6] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. *Ginzburg-Landau vortices*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 13. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [7] Haïm Brezis. New questions related to the topological degree. In *The unity of mathematics*, volume 244 of *Progr. Math.*, pages 137–154. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.
- [8] Luis A. Caffarelli and Michael G. Crandall. Distance functions and almost global solutions of eikonal equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 35(3) :391–414, 2010.
- [9] Luis A. Caffarelli and Michael G. Crandall. The problem of two sticks. *Expo. Math.*, 30(1) :69–95, 2012.
- [10] Feng Dai and Yuan Xu. *Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2013.
- [11] Gianni Dal Maso. *An introduction to Γ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [12] Camillo De Lellis and Radu Ignat. A regularizing property of the 2d-eikonal equation. 2014.
- [13] Camillo De Lellis and Felix Otto. Structure of entropy solutions to the eikonal equation. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 5(2) :107–145, 2003.
- [14] Antonio DeSimone, Stefan Müller, Robert V. Kohn, and Felix Otto. A compactness result in the gradient theory of phase transitions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 131(4) :833–844, 2001.
- [15] Lukas Döring, Radu Ignat, and Felix Otto. A reduced model for domain walls in soft ferromagnetic films at the cross-over from symmetric to asymmetric wall types. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 16(7) :1377–1422, 2014.
- [16] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

- [17] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [18] Alex Hubert and Rudolf Schäfer. *Magnetic domains : the analysis of magnetic microstructures*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [19] Radu Ignat. Two-dimensional unit-length vector fields of vanishing divergence. *J. Funct. Anal.*, 262(8) :3465–3494, 2012.
- [20] Radu Ignat and Hans Knüpfer. Vortex energy and 360° Néel walls in thin-film micromagnetics. *Comm. Pure Appl. Math.*, 63(12) :1677–1724, 2010.
- [21] Radu Ignat and Benoît Merlet. Lower bound for the energy of Bloch walls in micromagnetics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199(2) :369–406, 2011.
- [22] Radu Ignat and Benoît Merlet. Entropy method for line-energies. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 44(3-4) :375–418, 2012.
- [23] Radu Ignat and Roger Moser. A zigzag pattern in micromagnetics. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 98(2) :139–159, 2012.
- [24] Radu Ignat and Felix Otto. A compactness result for Landau state in thin-film micromagnetics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 28(2) :247–282, 2011.
- [25] Pierre-Emmanuel Jabin, Felix Otto, and Benoît Perthame. Line-energy Ginzburg-Landau models : zero-energy states. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 1(1) :187–202, 2002.
- [26] Pierre-Emmanuel Jabin and Benoît Perthame. Compactness in Ginzburg-Landau energy by kinetic averaging. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(9) :1096–1109, 2001.
- [27] Robert L. Jerrard. Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(4) :721–746, 1999.
- [28] Robert L. Jerrard and Halil Mete Soner. The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 14(2) :151–191, 2002.
- [29] W. Jin and R. V. Kohn. Singular perturbation and the energy of folds. *J. Nonlinear Sci.*, 10(3) :355–390, 2000.
- [30] Petru Mironescu. Sobolev maps on manifolds : degree, approximation, lifting. In *Perspectives in nonlinear partial differential equations*, volume 446 of *Contemp. Math.*, pages 413–436. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [31] Luciano Modica and Stefano Mortola. Un esempio di Γ^- -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1) :285–299, 1977.
- [32] Arkady Poliakovsky. On a singular perturbation problem related to optimal lifting in BV-space. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 28(4) :411–426, 2007.
- [33] Tristan Rivière and Sylvia Serfaty. Limiting domain wall energy for a problem related to micromagnetics. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(3) :294–338, 2001.